

图像处理

小波

图像融合

(31)

分辨率

82-85

精确重构多小波与图像融合

A Multiwavelet with Accurate Reconstruction and Image Fusion

王玲

TP391.41

TN919.8

(四川师范大学计算机科学系 成都610066)

Abstract Recently, the application of multiwavelets in image procession is an area of active research. This paper deals with some important performances of multiwavelets. And a multiwavelet with orthogonality, symmetry, compact support in $[0, 1]$ and approximation order 2, is applied in image fusion. An example of map fusion is given, with satisfactory effects.

Keywords Multiwavelet, Accurate reconstruction, Boundary distortion, Balanced multiwavelet, Image fusion

1. 引言

近十年来,小波在图像处理中的应用已经非常广泛,在这方面的研究重点之一是如何选择好的小波基。由于图像本身的特点,再加上人眼的视觉特性,要求小波基能同时拥有许多好性质^[1],例如正交性、对称性、短支集、高消失矩等,对单小波来说却是不可能的^[2]。

目前,有关小波理论发展的一个非常重要方向——多小波理论研究引起了人们广泛的关注,并在最近两年内取得了较大的进展^[1]。早在1991年,Alpert 和 Rokhlin 第一次构造了多尺度函数用于积分方程求解^[2];1994年,Goodman 等人基于 r 阶的多分辨分析,建立了多小波的基本理论框架^[3];同年,Geronimo, Hardin 和 Massopust 利用分形插值,成功地构造了正交、短支集、实对称和二阶逼近的多尺度函数 $\Phi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t)]^T$,称为 GHM 多小波^[3],能同时拥有这么好的性质对单小波来说却是不可能的^[4];从1996年以后,更多的对称、正交多小波被构造出来,多小波的理论研究也取得了突破^[5,7,8],特别是以下几个人的工作:Chui 和 Lian 在研究了多小波的性质之后给出了 $[0, 2]$ 和 $[0, 3]$ 上满足 Hermite 插值条件的2阶多小波^[7],Donovan 等人提出了互卷的多分辨分析,并构造了正交样条多小波^[6],Strang 和 Strela 等人提出了两尺度相似变换工具来分析多小波,并用有限元的方法构造出了二次样条多小波^[9];1998年 Jiang 也构造了支集在 $[0, N]$ ($N=2, 3, \dots, 6$) 上具有最优时频分辨率的2阶多小波和对应的多滤波器组^[1]。这些都为多小波

的实际应用奠定了基础。

尽管多小波理论研究取得了不少实质性的结果,但将它们成功地应用于信号和图像处理中仍然受到很大制约,其根本原因是:①大多数构造的多尺度函数不满足低通特性(即 $H(0) = 1$);②如何将一维信号转换为多小波需要的向量输入流。通常的解决办法是对初始采样序列进行适当的预滤波处理^[1],实验表明经预滤波后的多小波用于去噪取得了满意的结果^[10]。遗憾的是,现有的预滤波器却破坏了多少波的正交性和对称性。为了直接得到低通特性,Lebrun 和 Vetterli 提出了多小波的平衡改进方法^[4],避免了预滤波。

图像融合技术是指将同一对象的几幅图像中感兴趣的部分或全部融合到一幅图像中,例如图像1和图像2都是物体 A 和 B 的映象,图像1中物体 A 较清晰,图像2中物体 B 较清晰,于是可将两幅图像融合成图像3,使物体 A 和 B 在图像3中都较清晰;又如,将两幅地图拼接成一幅更大的地图也可以理解为图像融合。处理图像融合的技术之一是利用小波变换,在变换域中来组合系数,或去除拼接后出现的边界效应,于是这就对小波基提出了精确重构的要求。一般地,小波在应用中均采用了各种边界延拓的方法减少重构时出现的边界误差,能否从根本上去除这种边界误差呢?

本文讨论了多小波的性质,并利用一个支集在 $[0, 1]$ 上的精确重构多小波来处理一幅地图的拼接,尽管该多小波的正则性较差,但却具有精确重构的特性和二阶逼近性,没有边界失真效应。图像实验表明经过平衡处理后,多小波的频率域变换技术将对图像融合起

王玲 博士生,副教授,研究方向为多小波理论研究、图像处理和分形等。

重要的作用。

2. 多小波及其性质

一组函数集 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T$ ($r \geq 1$) 称为 r 阶正交多小波, 如果其伸缩和平移 $\psi_{j,k} = (\psi_1(2^{-1}x-k), \dots, \psi_r(2^{-1}x-k))^T$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) 形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基。为了概念清楚, 我们称 $r=1$ 时 Ψ 为单小波, $r>1$ 时 Ψ 为多小波。

与单小波一样, 生成正交多小波 Ψ 相应的多尺度函数 $\Phi = (\varphi_0, \dots, \varphi_r)^T$ 仍然满足 r 阶的多分辨率分析 $\{V_r\}$, 于是存在 $r \times r$ 矩阵 H_k 和 G_k , 使 Φ 和 Ψ 满足矩阵尺度方程:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \Phi(2x-k) \quad (1)$$

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \Phi(2x-k) \quad (2)$$

或在频域上表示:

$$\hat{\Phi}(\omega) = H(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2) \quad \hat{\Psi}(\omega) = G(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2)$$

其中 H 和 G 分别是 $\{H_k\}$ 和 $\{G_k\}$ 的矩阵频率响应:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k H_k e^{-i\omega k} \quad G(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k G_k e^{-i\omega k}$$

若 $H_k=0, G_k=0, k < 0$ 或 $k > N, N \in \mathbb{Z}_+$ (这里 0 代表 $r \times r$ 的零阵), 则称 $\{\Phi, \Psi\}$ 是紧支的, 此时 $\{H, G\}$ 是 FIR 多滤波器组。

性质 1^[3] 设 $\Phi(x)$ 是全局线性独立的尺度函数, 也就是, 如果:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \Phi(x-k) = 0, \text{ 则 } \alpha_k = 0, k \in \mathbb{Z}$$

那么 $\text{supp} \Phi = [0, N]$, 当且仅当 H_0 和 H_N 都不是幂零的。

这里 $\Phi(x)$ 的支集定义为各分量尺度 $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ 的支集之并。

性质 2^[1] (1) 定义的 Φ 是尺度函数, 且是紧支的, 于是可由加细掩膜 H 产生 Φ , 即:

$$\hat{\Phi}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\omega/2) \cdots H(\omega/2^n) u_0 \frac{\sin(\omega/2^{n+1})}{\omega/2^{n+1}} e^{-i\omega/2^{n+1}} \quad (3)$$

其中, u_0 是 $H(0)$ 的右 1-特征向量。

性质 3 设多尺度函数 $\Phi(x)$ 产生 r 阶多分辨率分析 $\{V_r\}$, 且满足 (1), Ψ 是对应的多小波, 相应的矩阵频率响应是 H 和 G , 若 $\Phi(x)$ 是紧支正交的, 则:

$$i) \hat{\Phi}(\omega) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} H(\exp(-i\omega/2^n)) \right] u, \text{ 这里, } u = \hat{\Phi}(0)$$

是 $H(0)$ 的右 1-特征向量。

ii) H 满足正交条件:

$$\sum_j H_j H_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Ψ 是正交的, 当且仅当 G 满足如下正交条件:

$$\sum_j H_j G_{j+2k}^T = 0 \quad \sum_j G_j G_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

iii) 若 R 是任意的正交矩阵, 则: $\tilde{\Phi}(x) = R\Phi(x)$ 和

$\tilde{\Psi}(x) = R\Psi(x)$ 仍然是正交的多尺度函数和多小波, 对应的矩阵频率响应是: $\tilde{H}(\omega) = RH(\omega)R^T$ 和 $\tilde{G}(\omega) = RG(\omega)R^T$ 。

性质 3 中 i) 和 ii) 的证明同单小波, iii) 的证明是显然的。

性质 4 设多尺度函数 $\Phi(x) = (\varphi_0, \dots, \varphi_r)^T$ 产生 r 阶多分辨率分析 $\{V_r\}$, 且满足 (1)。若 $\text{supp} \varphi_0 = \dots = \text{supp} \varphi_r = [0, N]$; φ_i ($0 \leq i \leq r$) 是对称的或反对称的, 则 $H_k = S_r H_{N-k} S_r$; S_r 是 $r \times r$ 的对角阵, $S_r(i, j) = \begin{cases} 1 & i=j \text{ 且 } \varphi_i \text{ 是对称的} \\ -1 & i=j \text{ 且 } \varphi_i \text{ 是反对称的} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

性质 4 是文 [7] 中定理 1 特例的简单推广。

性质 5 $\{H, G\}$ 产生正交的尺度函数 Φ 和小波 Ψ , 当且仅当:

$$D_{H,G}(z) = \begin{bmatrix} H(z) & H(-z) \\ G(z) & G(-z) \end{bmatrix}$$

是 $|z|=1$ 上的酉阵, 即仿酉阵。

事实上, 性质 3 的 ii) 是性质 5 的一个局部结果。

性质 6 设 $\Phi(x)$ 是由 (1) 定义的多尺度函数, $\{\Phi(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 形成 V_0 上的 Riesz 基, 则 $\Phi(x)$ 有 m 阶消失矩, 当且仅当: $\Phi(x)$ 的加细掩膜 $H(\omega)$ 满足以下条件:

存在向量 $y_k \in \mathbb{R}^r, k=0, 1, \dots, m-1; y_0 \neq 0$ 使得对 $n=0, 1, \dots, m-1$, 有:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (y_k)^T (2i)^{k-n} (D^{n-k} H)(0) = 2^{-n} (y_0)^T \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (y_k)^T (2i)^{k-n} (D^{n-k} H)(\pi) = 0 \quad (7)$$

从 (6) 和 (7) 式可以看出, 多小波 $H(\omega)$ 的低通特性和高通特性不如单小波那么清楚, 所以在用多小波进行 Mallat 算法的塔式分解和重构时, 一般都要先作预处理 (预滤波或平衡处理), 以便获取较好的低通和高通特性。

3. 多小波的构造

理论上, 多小波基的构造比单小波基有更大的自由度, 一般是从以下几方面来考虑的:

(1) 从性质 3 的 ii) 可以看出, 只要构造出一个多小波基, 左乘正交阵仍然是多小波基;

(2) 可以利用性质 4 的对称性直接计算多小波 $\Phi(x)$ ^[7];

(3) 由尺度函数 $\Phi(x)$ 计算多小波 $\Psi(x)$ 可利用性质 5, 通过将 $H(z)$ 扩展成仿酉阵 $D_{H,G}(z)$, 直接用 Gram-Schmidt 正交化过程即可完成。

但实际中构造出的多小波非常有限, 其主要困难

是在计算难度上,文[1][7]等都加以限制(如 $r=2$, 或有插值条件,或有最优时频分辨率等)后构造了一些多小波。目前,能应用到图像处理中的多小波基非常少,最根本的问题仍然是预处理。

例如:文[2]构造了一组支集在 $[0,1]$ 上的多小波:

$$\psi_u(x) = 2^{1/2} f_u(2x-1); u=1, \dots, r$$

这里 f_u 是 $[-1,1]$ 上的正交、对称、高消失矩的函数,但文中并没有给出对应的多滤波器组。对 $r=2$ 的情况,可直接计算出:

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+e^{-i\omega}) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}(1-e^{-i\omega}) & \frac{1}{4}(1+e^{-i\omega}) \end{bmatrix}$$

利用性质3中的式(3),可求出:

$$G_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于该多小波对应滤波器的长度是2,因而在分解后能精确重构,无边界失真效应,在应用时避免了边界延拓,我们称该小波为精确重构多小波。

分析所求出的多滤波器组 $\{H, G\}$, $H(0)$ 的右1-特征向量 $u \neq 1$, 这样低频信息就不能被保持(即不满足低通特性);而 $G(0) \neq 0$, 使得大多数平滑信号不能被 G 滤掉(即不满足高通特性)。受平衡多小波启发^[4], 利用性质3的iii), 我们对该小波作了如下改进。

由于在信号去噪、图像压缩等许多应用中,我们希望高频的细节部分除边缘点外,大多数为零,即 G 要有好的高通特性。设 R 是正交阵,考虑一阶近似,有:

$$[1,1]R^T G(0)R = [0,0]$$

再与低通特性相结合: $[1,1]R^T H(0)R = [1,1]$, 求出 $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 此时具有良好低通高通特性的多小波滤波器组是 $\{\tilde{H}, \tilde{G}\} = \{RHR^T, RGR^T\}$, 记为 Opt-rec 多小波。

4. 实验结果

由于改进后的多小波滤波器组 $\{\tilde{H}, \tilde{G}\}$ 具有良好的低通和高通特性,所以对原始采样信号可不作任何预滤波处理,但为了解决向量输入流问题,仍需要对采样数据 s 作等值向量分流,再作向下 $\downarrow 2$ 采样(也可以不向下 $\downarrow 2$ 采样,这样信息量加倍,在重构后再向下 $\downarrow 2$ 采样)。

定义如下块矩阵:

$$C_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} RH_0 R^T & RH_1 R^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & RH_0 R^T & RH_1 R^T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & RH_0 R^T & RH_1 R^T \end{bmatrix}_{\frac{1}{2} \times l}$$

D_l 的定义同上,只不过将 H_0 和 H_1 换成 G_0 和 G_1 , $l_j = M/2^{j-1}$, M 是原始数据长度,于是有如下的分解和重构公式:

令 $f \in V$, 则:

$$f(x) = \sum_{j=1}^l \sum_{k \in Z} c_{j,0,k} \phi_{j,0,k}(x) = \sum_{j=1}^l \sum_{k \in Z} c_{j,0,k} \phi_{j,0,k}(x) + \sum_{j=1}^l \sum_{0 \leq m < j} \sum_{k \in Z} d_{j,m,k} \psi_{j,m,k}(x) \quad (8)$$

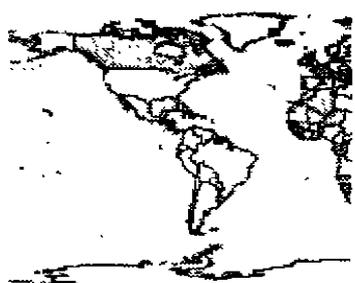
这里 $0 \leq j < l$, 且:

$$c_{l,j,k} = \int f(x) \phi_{l,j,k}(x) dx \quad d_{l,j,k} = \int f(x) \psi_{l,j,k}(x) dx$$

$$C_{l,k} = (c_{1,j,k}, \dots, c_{l,j,k})^T \quad D_{l,k} = (d_{1,j,k}, \dots, d_{l,j,k})^T$$

$$\text{则 } \begin{cases} C_{l-1,k} = \sum_n \tilde{H}_n C_{l,2k-n} \\ D_{l-1,k} = \sum_n \tilde{G}_n C_{l,2k+n} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{且 } C_{l,k} = \sum_k (\tilde{H}_1 C_{l-1,2k+n} + \tilde{G}_2 D_{l-1,2k+n}) \quad (10)$$



(a)



(b)

图1 (a),(b)两幅原图

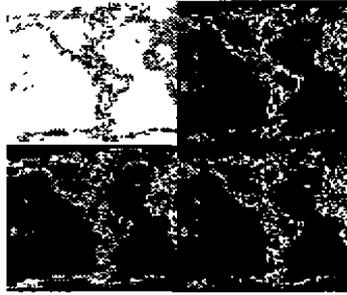


图2 (a)图一层多小波分解

(9)和(10)是多小波的分解重构公式,从公式中可以看出,只要确定了 $C_{j,k}$,就能用 Mallat 算法进行多小波的分解和重构。在单小波中 $C_{j,k}$ 来自采样值 $f(k/2^j)$,但在多小波中,一方面由于单序列的采样值 $f(x)$ 与矩阵 $C_{j,k}$ 之间的对应是不平凡的,另一方面,因为现在所构造的多小波多数不满足低通特性($H(0)=1$),所以不可避免要作平衡处理。

例:有一幅世界地图被摄像成两幅(如:图1),现要将其拼接,对其进行三层 Opt-rec 多小波变换(图2)后,将两幅地图在变换后的频率域作拼接,因为此时只要在高频部分的边界作对应比较,很容易实现拼接,此时再作成一幅完整的图像重构回来(图3),即可实现无边界效应的图像融合。由于多小波基的精确重构特性,使得最后的图像非常完整。

参考文献

- 1 Jiang Qingtang. On the Design of Multifilter Banks and Orthonormal Multiwavelet Banks. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(12): 3292~3302
- 2 Alpert B K, Rokhlin V. A fast algorithm for the evaluation of Legendre expansions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1991, 12: 158~179
- 3 Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity r .

(上接第78页)

参考文献

- 1 Wallace C K. The JPEG still picture compression standard. *CAM*, 1991, 34(4): 30~45
- 2 Sikora T. The MPEG-4 Video standard Verification Model. *IEEE Trans. CVST*, 1997, 7(Feb)
- 3 蒋泰,等.分形图像压缩技术研究.华东工业大学学报, 1997, 19(4): 65~70
- 4 徐佩霞,等.小波分析与应用实例.中国科学技术大学出版社, 1996
- 5 Agarwal R C, Burrus C S. Fast digital convolution using



图3 重构的拼接图

- Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 342(1): 307~324
- 4 Lebrun J, Vetterli M. Balanced multiwavelets theory and design. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(4): 1119~1125
- 5 Geronimo J S, et al. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. *J. Approx. Theory*, 1994, 78: 373~401
- 6 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF Regional Conf., Ser. in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1992
- 7 Chui C K, Lian J -a. A study of orthonormal multiwavelets. *Appl. Numer. Math.*, 1996, 20(3): 273~298
- 8 Wasin D K, et al. Global support of a scaling vector. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 1998, 5: 493~498
- 9 Xia X -G. A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(6): 1558~1570
- 10 Bui T D, Chen G. Translation-Invariant Denoising Using Multiwavelets. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(12): 3474~3420
- 11 Srrang G, Strela V. Short Wavelets and matrix dilaton equations. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43: 108~115
- 12 Donovan G G, et al. Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise-polynomial wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, 27(6): 1791~1815

Fermat transforms. *SWIEEEO. Record*, 1973: 538~543

- 6 Agarwal R C, Burrus C S. Fast convolution using Fermat number transforms with application to digital filtering. *IEEE Trans., Acoustics, Speech, and Singal Processing*, 1974, 22: 87~97
- 7 Agarwal R C, Burrus C S. Number theoretic transforms to implement fast digital convolutioin. *PIEEE.*, 1976, 63: 216~225
- 8 高文.多媒体数据压缩技术.电子工业出版社, 1994
- 9 杨品,等.图像压缩技术的分析与评价.清华大学学报, 1995, 35(4): 48~54