几何造型 有理B样条曲线 端点性质 形状控制 (30)

79-81

有理 B 样条曲线的端点性质及形状控制方法

The Properties of Vertex and Control of Shape for Non-uniform Rational B-Splines

雷开彬 TP391.41 TP391.72
（涪陵师专计算机系 重庆涪陵408003）

Abstract In this paper, using linear combination of vectors, the properties of vertex are studied for non-uniform rational B-splines of aritrary degree. The relations of vectors, weights and shape are discussed. Therefore, a new method for modifying and controling the shape of rational B-spline is obtained.

Keywords Non-uniform rational B-spline, Properties of vertex, Control of shapes, Computer aided geometric design

一、引言

在有理 B 样条曲线曲面的表示中，由于引进了对形状具有可控作用的权因子，并通过 Piegl L 等人在文[1]～[4]的系列文献中，对权因子 ω_i 的几何意义的揭示，使非均匀有理 B 样条（NURBS）在很多计算机几何造型系统中得到了进一步的应用，国际标准组织已把 UNRBS 方法列为 STEP 国际标准，尽管如此，对该样条曲线中权因子的几何意义的研究与实际应用仍存在很大差距。作者认为研究有理 B 样条曲线的权因子与形状控制的关键在于研究该样条曲线段的两端点性质。基于此，在文[6]中用建立局部仿射坐标系的方法，研究了有理三次均匀 B 样条的端点性质及曲线的形状控制。本文采用 n 维向量线性组合方法，拟对一般 K 次非均匀有理 B 样条曲线的端点性质进行讨论，并进一步地揭示曲线段的端点、权因子、几何形状之间的内在相互确定关系，利用该性质给出了对该样条曲线形状的局部控制与修改方法。

二、K 次非均匀有理 B 样条的端点性质

设 K 次非均匀有理 B 样条曲线用分段有理式矢函数表示为[7]：

$$P(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(u)},\quad u\in[u_k,u_{n+1}]$$

其中，$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为权因子，且 $\omega_0,\omega_n>0$，其余 $\omega_i\geqslant 0$，$P_0,P_1,\cdots,P_n$ 为控制顶点。$N_{i,k}(u)$ 是定义在节点矢量 $U=[u_0,u_1,\cdots,u_{n+k+1}]$ 上的 K 次 B 样条基函数。整条曲线的定义域为 $[u_k,u_{n+1}]$。以下假定节点矢量和控制顶点不变。

现选取定义域为 $u\in[u_i,u_{i+1}]\subset[u_k,u_{n+1}]$ 的曲线段讨论之。其矢量函数表示为：

$$P(u)=\frac{\sum_{j=i-k}^{i}\omega_j P_j N_{j,k}(u)}{\sum_{j=i-k}^{i}\omega_j N_{j,k}(u)},\quad u\in[u_i,u_{i+1}] \tag{2.1}$$

该段的控制顶点为 $P_{i-k},P_{i-k+1},\cdots,P_i$，共 $k+1$ 个。节点矢量为 $U=[u_{i-k},u_{i-k+1},\cdots,u_i,u_{i+1},\cdots,U_{n+k+1}]\subset U$，共 $2(k+1)$ 个。

下面任给两组只是 ω_{i-k} 变化的权因子，仅考虑样条端点的变化情况。若给 $\omega^0_{i-k},\omega_{i-k+1},\cdots,\omega_i$，其端点 $P(u_i)(u=u_i)$ 可表为：

$$P_0(u)=\frac{\omega^0_{i-k}P_{i-k}N_{i-k,k}(u_i)+\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j P_j N_{j,k}(u_i)}{\omega^0_{i-k}N_{i-k,k}(u_i)+\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j N_{j,k}(u_i)}$$

若另给一组权因子 $\omega^1_{i-k},\omega_{i-k+1},\cdots,\omega_i$，当 $u=u_i$ 时所对应的端点为：

$$P_1(u)=\frac{\omega^1_{i-k}P_{i-k}N_{i-k,k}(u_i)+\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j P_j N_{j,k}(u_i)}{\omega^1_{i-k}N_{i-k,k}(u_i)+\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j N_{j,k}(u_i)}$$

令

$$d^0_{i-k}=P_0(u_i)-P_{i-k}$$

$$=\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j N_{j,k}(u_i)(P_j-P_{i-k})}{\omega^0_{i-k}N_{i-k,k}(u_i)+\sum_{j=i-k+1}^{i}\omega_j N_{j,k}(u_i)} \tag{2.2}$$

$$d^1_{i-k}=P_1(u_i)-P_{i-k}$$

$$=\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_i)(P_j-P_{i-k})}{\omega_{i-k}^1 N_{i-k,k}(u_i)-\sum_{j=i-k-1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_i)} \qquad (2.3)$$

分别称 d_{i-k}^0、d_{i-k}^1 为端点 $P_0(u_i)$，$P_1(u_i)$ 的端点矢，(2.2)，(2.3)式表明其分子相同，且 d_{i-k}^0、d_{i-k}^1 皆是矢量 $(P_j-P_{i-k})(j=i-k+1,\cdots,i)$ 的线性组合。故 $d_{i-k}^0 // d_{i-k}^1$，又由 d_{i-k}^0 与 d_{i-k}^1 有共同起点 P_{i-k}，因此三点 P_{i-k}、$P_0(u_i)$，$P_1(u_i)$ 共线。亦即仅控制顶点 P_{i-k} 对应的权因子 ω_{i-k} 发生变化时，该样条段的端点在过 P_{i-k} 点的线段上移动。称此线段为修改线。

现对上述两组权因子，考查另一端点 $P(u_{i+1})(u=u_{i+1})$ 的变化情况，对权因子 ω_{i-k}^0，ω_{i-k+1}，$\cdots$，ω_i，另一端点 $P(u_{i+1})$ 表为：

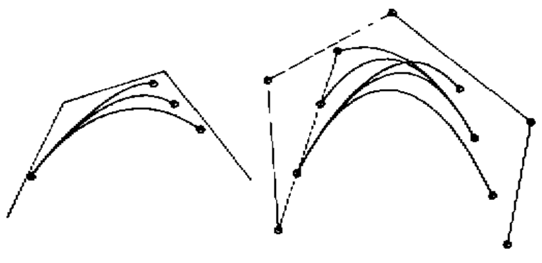
$P(u_{i+1})=$

$$\frac{\omega_{i-k}^0 P_{i-k} N_{i-k,k}(u_{i+1})+\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j P_j N_{j,k}(u_{i+1})}{\omega_{i-k}^0 N_{i-k,k}(u_{i+1})+\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})}$$

由于基函数 $N_{i-k,k}(u)$ 在 $[u_{i-k},u_{i+1}]$ 上是局部正性和支撑性的，同时 $N_{i-k,k}(u)$ 在实轴上是连续的，可知 $N_{i-k,k}(u_{i+1})=0$，故

$$P(u_{i+1})=\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j P_j N_{j,k}(u_{i+1})}{\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})}$$

因此 $P(u_{i+1})$ 与权因子 ω_{i-k}^0 无关。所以端点 $P(u_{i+1})$ 在上述两组权因子中位置不发生变化。同理有 $N_{i,k}(u_i)=0$，$P(u_i)$ 与权因子 ω_i 无关，见图1。



三次有理B样条　　四次有理B样条

图1

性质1　对K次非均匀有理B样条曲线段，二端点所对应的权因子 ω_{i-k}，ω_i 发生变化，其余权因子不变时，则该样条曲线段的二端点在其过控制顶点 P_{i-k} 和 P_i 的修改线上移动。此二条修改线由权因子 ω_{i-k+1}，$\cdots$，ω_{i-1} 决定。

又对任一组权因子 ω_{i-k}，$\cdots$，ω_i，对于 $[u_i,u_{i+1}]$ 样条曲线段，由于 $N_{i,k}(u_i)=0$ 和 $N_{i-k,k}(u_{i+1})=0$，于是端点 $P(u_i)$，$P(u_{i+1})$ 的端点矢为：

$$d_{i-k}=P(u_i)-P_{i-k}=\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)(P_j-P_{i-k})}{\sum_{j=i-k}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)} \qquad (2.4)$$

$$d_i=P(u_{i+1})-P_i=\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})(P_j-P_{i-k})}{\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})} \qquad (2.5)$$

又因 $\omega_j N_{j,k}(u_i)\geqslant 0(j=i-k,\cdots,i)$，故

$$0\leqslant\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)}{\sum_{j=i-k}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)}\leqslant 1$$

$$0\leqslant\frac{\sum_{j=i-k+1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})}{\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})}\leqslant 1$$

于是 d_{i-k}，d_i 是 $(P_j-P_{i-k})(j=i-k+1,\cdots,i-1)$ 的线性凸组合性，知 d_{i-k} 是在以 P_{i-k} 为顶点，以 (P_j-P_{i-k}) 为棱的锥体 $P_{i-k}-(P_{i-k+1},\cdots,P_{i-1})$ 内部或其面上。d_i 是在 $P_i-(P_{i-k+1},\cdots,P_{i-1})$ 的内部或其面上。

性质2　K次非均匀有理B样条曲线段的两端点分别位于锥体 $P_{i-k}-(P_{i-k+1},\cdots,P_{i-1})$ 和 $P_i-(P_{i-k+1},\cdots,P_{i-1})$ 的内部或其面上。

综上所述，对任给一组权因子 ω_{i-k}，$\cdots$，ω_i，所确定的有理样条曲线的端点分别与 P_{i-k} 和 P_i 连线构成两条修改线。在该修改线上任取其一点，皆可作为新的样条段的端点。亦即存在一组新的权因子 $\omega_j^*(j=i-k,\cdots,i)$ 使其有理B样条曲线的端点恰为在修改线上所指定的点，这就是K次非均匀有理B样条曲线的端点位置、权因子、曲线形状之间的相互确定关系。

三、K次非均匀有理B样条曲线的形状修改

1. 三参数修改法

对给定的权因子，ω_{i-k}，ω_{i-k+1}，$\cdots$，ω_{i-1}，ω_i，其端点矢为(2.4)，(2.5)式，若对另给定一组权因子 ω_{i-k}^*，$\alpha\omega_{i-k+1}$，$\cdots$，$\alpha\omega_{i-1}$，ω_i^*，由(2.4)，(2.5)式知其端点矢 d_{i-k}^*，d_i^* 有：

$$d_{i-k}^*=\frac{\alpha\sum_{j=i-k}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)}{\omega_{i-k}^* N_{i-k,k}(u_i)+\alpha\sum_{j=i-k+1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_i)}\cdot d_{i-k} \qquad (3.1)$$

$$d_i^*=\frac{\alpha\sum_{j=i-k+1}^{i} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})}{\alpha\sum_{j=i+k-1}^{i-1} \omega_j N_{j,k}(u_{i+1})+\omega_i^* N_{i,k}(u_{i+1})}\cdot d_i \qquad (3.2)$$

在(3.1)、(3.2)式中，改变参数 $\omega^*_{i-k}, \alpha, \omega^*_i$ 时，样条端点在修改线上移动或使整段曲线沿修改线平移原端点矢的一个倍数。称此方法为三参数改法，见图2。

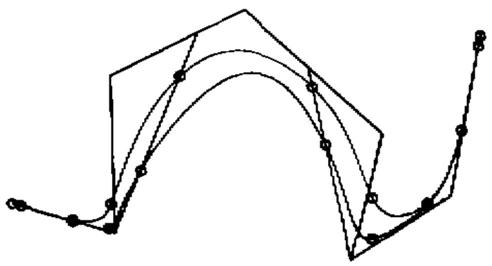


图2

2. **联合修改法**

在 $P_{i-k}-(P_{i-k+1},\cdots,P_{i-1})$ 内任指定一点 P，于是存在一组系数 $\alpha_j(j=i-k-1,\cdots,i-1)$，由(2.4)式，且 $0\leqslant\sum\limits_{j=i-k+1}^{i-1}\alpha_j\leqslant1$，使得

$$d=P-P_{i-k}=\sum_{j=i-k+1}^{i-1}\alpha_j(P_j-P_{i-k}) \qquad (3.3)$$

若将 P 点视为有理 B 样条曲线段的端点，由(2.5)知，存在一组权因子 $\omega^*_{i-k},\cdots,\omega^*_{i-1}$，使得(2.4)式成立：

$$d=\frac{\sum\limits_{j=i-k+1}^{i-1}\omega^*_j N_{j,k}(u_i)(P_j-P_{i-k})}{\sum\limits_{j=i-k}^{i-1}\omega^*_j N_{j,k}(u_i)}$$

于是得方程组

$$\alpha_j\Big(\sum_{l=i-k}^{i-1}\omega^*_l N_{l,k}(u_i)\Big)=\omega^*_j N_{j,k}(u_i)$$
$$(j=i-k+1,\cdots,i-1)$$

该方程组是关于 $\omega^*_{i-k},\cdots,\omega^*_{i-1}$ 未知量的 $k-1$ 个齐次线性方程组，因此必有一组非零解。即指定的 P 点必为一有理 B 样条的端点。分别以 $\omega_{i-k-1},\omega^*_{i-k},\cdots,\omega^*_{i-1}$ 和 $\omega^*_{i-k},\cdots,\omega^*_{i-1},\omega_i$（其中 ω_{i-k-1},ω_i 为任指定权）作二有理样条段，其定义域为 $[u_{i-1},u_i]$ 和 $[u_i,u_{i+1}]$，该二曲线段分别以 P 点为后端点和前端点。并确定了过 P_{i-k-1} 和 P_i 构成的两条修改线。通过改变 ω_{i-k-1},ω_i 的值，可控制在修改线上前后端点的位置。这种由指定点和修改线进行联合修改曲线形状的方法，可以较快地达到控制几何形状的目的。见图3(三次有理 B 样条)。

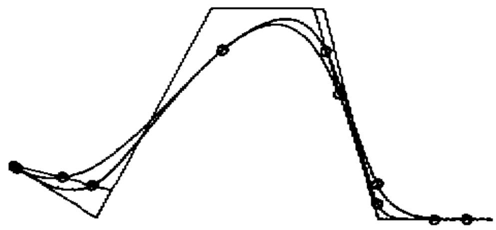


图3

结束语 从以上讨论，我们可以看出使用向量线性组合的有关性质，使得上述问题的讨论简单化，并适合于平面和空间的任意次非均匀有理 B 样条曲线，因此问题的研究具有一般性。为进一步研究有理曲线曲面的问题和方法提供了一些有益的参考。

参 考 文 献

1 Piegl L. A geometric investigation of the rational Bezier scheme of computer aided design. Computers in Industry, 1986, 7(5): 401～410

2 Piegl L. On the use of infinte control points in CAD. Computer Aided Geom Des., 1987, (4): 155～166

3 Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines, Part 1: Cuvers. Computer Aided Des., 1989, (4): 509～518

4 Piegl L. On UNRBS: A survey. IEEE CG&A, 1991, January, 55～71

5 康宝生. 有理曲线曲面造型方法理论及应用研究:[西北工业大学博士论文]. 1991

6 雷开彬. 有理曲线的几何造型:[西北工业大学硕士论文]. 1993

7 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条(CAGD&NURBS). 北京航空航天大学出版社, 1994

(上接第32页)

对象的位置透明性和实现方法的透明性。

DBDIS 作为一个分布式数据库管理系统，它面临的是多任务分布环境，可能会有多个用户在同一时刻对同一数据进行读或写操作，因而需要并发控制功能来保证数据的一致性。我们利用 CORBA 公共对象服务规范中的面向多进程的事务处理和并发控制机制来加强系统的可靠性。

参 考 文 献

1 The common object request broker architecture and specification. Revision 2.2, February 1998

2 CORBA services: common object service specification. November 1997