

图像压缩

算法

图像压缩

NTT

(29)

多媒体

信息处理

NTT:一种图像压缩的新算法*

NTT: The New Algorithm in the Image Compression

张虹 张小飞

TN/919.8

TP391

(中国矿业大学计算机科学与技术系 徐州221008)

Abstract On the base of the analysis and assess of the current popular image compression techniques: DCT transformation method, fractal transformation method, and wavelet transformation method etc, an entirely new algorithm is created, which is based on number theory as the transformation algorithm—Number Theoretic Transform(NTT). In the paper, NTT and DCT are analyzed and compared to prove that in the process of image compression, the compression rate, compression speed and decompression accuracy etc are superior to DCT transformation. In the image compression technique this algorithm is a method worthy of probe and study.

Keywords Image compression, Number theory, Discrete cosine transformation

1 图像压缩技术

近几年来多媒体技术以其强大的生命力在全球逐步形成了一股不可阻挡的洪流,多媒体数据与传统的数据有很大差别,它具有数据类型多、数据量大等特点。随着多媒体技术的发展,对于多媒体数据特别是视频图像进行实时处理的需要越来越迫切,因此,图像压缩处理技术成为多媒体信息处理的关键技术之一。

当今最为流行的失真图像压缩技术有三种:离散余弦变换(DCT, Discrete Cosine Transformation)压缩、分形(Fractal)压缩及小波变换(Wavelet Transformation)压缩。在所有的正交变换编码中,离散余弦变换是仅次于 KLT 变换(无失真变换)的次最优变换,是经典的图像编码方法的典型代表,其编码技术已趋成熟,因而得以广泛应用。目前已制定国际标准 JPEG^[1] (Joint Photographic Experts Group) 和 MPEG^[2] (Moving Picture Experts Group)。JPEG 是 ISO 和 CCITT 联合制定的适用于连续色调、多级灰度、彩色/单色静止图像压缩的国际标准。JPEG 的核心部分是 DCT 编码技术,其对静止图像的压缩推荐使用的方法是将图像先分割成 8×8 大小的方块,然后再对其变换、量化和编码,并提供了符合人的视觉变化的量化表。编码方法主要利用 Huffman 编码及算术编码。MPEG 标准是 ISO/IEC 的第 11172 号标准,包括 MPEG 视频、MPEG 音频和 MPEG 系统 3 部分, MPEG

对运动图像的压缩主要采用帧内编码与帧间编码相结合的方法,帧内编码技术与 JPEG 相同,帧间编码采用运动补偿技术,即预测和内插两种方法。目前市场上均有基于离散余弦变换的 JPEG 及 MPEG 软件及硬件产品,由于压缩原理上的局限性,使得该技术在压缩比(灰度图像大于 25 倍,彩色图像大于 70 倍)时,会出现明显的块状效应,但低倍时效果很好,由于 DCT 变换必须存储基本函数(即三角函数)影响了压缩速度,且在运算过程中存在舍入误差,从而影响解压的精度。

分形压缩技术是利用分形几何中自相似的原理^[3],首先对图像进行分块,然后再去寻找各块之间的相似性,这里相似性的描述主要是依靠仿射变换来确定,一旦找到了每块的仿射变换,于是就保存下这个仿射变换的系数,由于每块的数据量远大于仿射变换的系数,因而使图像得到较好的压缩比,特别是对自然景物的压缩效果很好。但是由于该压缩编码速度太慢,且随被压缩图像增大,运算量增长过快,运算复杂度较高,因此影响分形压缩编码进入实用阶段。另外,对于特定的图像要选择什么仿射变换与概率数,且要满足 IFS 码的要求,是很难做到的,这也就限制了它的通用性。

小波变换技术是继离散余弦变换之后的又一种变换编码技术^[4],对图像的压缩类似于离散余弦变换,但小波变换是对整幅图像进行变换,在量化技术上主要依据变换后各级分辨率之间的自相似的特点,采用逐

* 该课题得到煤炭科研基金和校科研基金的资助,张虹 副教授,从事多媒体技术和软件工程的教学和科研工作。

级逼近技术达到减少数据存储的目的。用小波变换技术实现对图像视频及声音的压缩可以取得较好的压缩效果。美国休斯顿高级研究中心的基于小波变换的压缩技术 HARCC, 表现出较好的压缩与解压效果。但是对一般的小波变换编码, 恢复的图像有较强的边界效应。小波变换技术目前正处于研究阶段, 在压缩比、压缩与解压速度等方面还没有形成一致的标准, 距实用阶段仍有相当的距离。

由分析可知, 基于上述三种压缩技术在图像编码过程中及压缩效果方面各有其优点和不足之处。为此我们提出一种全新的数据压缩算法—数论变换(简称 NTT—Number Theory Transformation), 它有类似于 DCT 变换的 FFT 类型的快速算法, 且优于 DCT 快速算法。它在多媒体数据压缩特别是图像压缩中将会有很好的应用前景。

2 NTT 与 DCT 算法的分析与比较

70年代国外提出了以数论为理论基础的数论变换^[3~7], 并指出了该算法在计算机中进行信息处理的可能性, 引起国内外学者的关注和重视, 相继实现了在雷达、石油物探和医学技术等方面的应用。我们研究了 NTT 算法并与 DCT 算法进行了分析与比较, 找出两者有许多相似之处。本节针对 DCT 变换和 NTT 变换在原理上的比较, 提出了 NTT 在数据压缩技术中应用的设想。

2.1 离散余弦变换(DCT)^[8,9]

2.1.1 一维 DCT 变换 设 $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是第一类契比雪夫多项式, 它是由母函数 $(1-xt)/(1-2x^2+t^2)$ 依 t 展开得到的。

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2^k)^{n-k} \\ = \cos(n \cos^{-1} x)$$

容易验证 $T_n(x)$ 具有如下性质:

(1) 正交性

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m=n=0 \\ \pi & m=n \neq 0 \end{cases}$$

(2) 递推性

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

现在考虑 $T_n(x)$ 的前 N 个零点, 即当

$$x_m = \cos(2m+1)/2N, m=0, 1, \dots, N-1$$

的情况。令 $X_0^T = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$, 则 $T_i(X_0)$, $i=0, 1, \dots, N-1$ 就是一组非归一化的向量。

现在令

$$\varphi = C(i-1)T_{i-1}(X_0), i=1, 2, \dots, N$$

$$\text{其中 } C(m) = \begin{cases} \sqrt{1/2} & m=0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases}$$

从而有

$$\varphi_i \varphi_j = \begin{cases} N/2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ 及 } T^T T = \frac{N}{2} I$$

于是, $T^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ 就是一个正交变换, 这个 T 被称为离散余弦变换矩阵。

令 $f = [f_1, f_2, \dots, f_N]$ 表示信号向量(数据向量), $F = [F_1, F_2, \dots, F_N]$ 表示对 f 施行变换 T 后所得向量(以下称系数), 则一维 DCT 可以被一般地写为:

$$\begin{cases} F = a_0 T f \\ f = a_1 T^T F \end{cases} \quad (1)$$

其中, a_0, a_1 是归一化系数, 且满足 $a_0 a_1 = 2/N$ 。

(1) 式的分量形式为:

$$F(u) = a_0 C(u) \sum_{i=0}^{N-1} f(i) \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2N}, u=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

$$f(i) = a_1 \sum_{u=0}^{N-1} C(u) F(u) \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2N}, i=0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

(2)、(3) 式分别表示正向与反向一维 DCT 变换。

2.1.2 二维 DCT 变换 对于二维 DCT, 输入数据矩阵和系数矩阵 f, F 为:

$$f = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(M-1,0) & F(M-1,1) & \dots & F(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(M-1,0) & F(M-1,1) & \dots & F(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

则二维 DCT 可以简单地由一维 DCT 扩展而得

$$\begin{cases} F = a_0 T_M f T_N^T \\ f = a_1 T_M^T F T_N \end{cases} \quad (4)$$

其中 $a_0 a_1 = 4/N^2$, T_M 和 T_N 分别为 $M \times M$ 和 $N \times N$ 阶方阵, $T_M^T = [\varphi_0^M, \varphi_1^M, \dots, \varphi_{M-1}^M]$, $T_N^T = [\varphi_0^N, \varphi_1^N, \dots, \varphi_{N-1}^N]$,

$$(\varphi^M)^T = [C(l-1) \cos \frac{(l-1)\pi}{2k}, \dots, C(l-1) \cos \frac{(2k+1)(l-1)\pi}{2k}], (l=1, 2, \dots, k)$$

当 $M=N$ 时, 二维 $N \times N$ 阶 DCT 的分量表示可写为:

$$F(u, v) = a_0 C(u, v) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \cos \frac{(2i+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2N}, u, v=0, 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

$$f(t, j) = a_1 \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u, v) F(u, v) \cos \frac{(2j+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2j+1)v\pi}{2N}, t, j=0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

其中 $a_1 a_2 = \frac{4}{N^2}$

$$C(m_1, m_2) = \begin{cases} 1/2 & m_1 = m_2 = 0 \\ \sqrt{1/2} & m_1 m_2 = 0 \text{ 且 } m_1 \neq m_2 \\ 1 & m_1 m_2 > 0 \end{cases}$$

且有 $C(m_1, m_2) = C(m_1)C(m_2)$ 。

(5)式为正向 DCT 变换, (6)式为反向 DCT 变换。由(5)、(6)两式可以看出在变换及逆变换过程中, 必须存储三角函数(cos 函数), 因而影响了压缩比和编码速度, 又由于三角函数在变换运算中存在舍入误差, 这必然影响到解压精度。

2.2 数论变换(NTT)

2.2.1 一维 NTT 变换 设在以正整数 M 为模的环 Z_M 上有:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$$

$$\text{作变换 } X \equiv T x \pmod{M} \quad (7)$$

其中 T 为变换矩阵

$$T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \dots & \alpha^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha^{N-1} & \dots & \alpha^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{M}$$

即设 $x_n \in Z_M (n=0, 1, 2, \dots, N-1)$, 则

$$X_k \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk} \pmod{M} (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (8)$$

$$x_n \equiv N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \alpha^{-nk} \pmod{M} (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (9)$$

可以推导出数论变换(NTT)的性质^[5~7]: (1)线性性; (2)正交性; (3)周期性; (4)对称性; (5)位移定理; (6)循环卷积特性。

2.2.2 二维 NTT 变换 设 p 为正整数, 以 p 为模的整数环 Z_p :

$$Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

设 $x(n, m) \in Z_p (n=0, 1, \dots, N-1; m=0, 1, \dots, M-1)$, 则二维 NTT 变换为:

$$X(r, s) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \alpha^n \beta^m \pmod{p} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} s=0, 1, \dots, M-1 \\ r=0, 1, \dots, N-1 \end{pmatrix}$$

$$x(n, m) \equiv N^{-1} M^{-1} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{M-1} X(r, s) \alpha^{-rn} \beta^{-sm} \pmod{p} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} m=0, 1, \dots, M-1 \\ n=0, 1, \dots, N-1 \end{pmatrix}$$

二维数论变换的矩阵表示形式如下:

$$X \equiv T_N x T_M \pmod{p}$$

$$x \equiv T_N^{-1} X T_M^{-1} \pmod{p} \quad (12)$$

其中

$$x =$$

$$\begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0,M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(N-1,0) & x(N-1,1) & \dots & x(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

$$X =$$

$$\begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) & \dots & X(0,M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X(N-1,0) & X(N-1,1) & \dots & X(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

$$T_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{N-1} & \dots & \alpha^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{p}$$

$$T_N^{-1} = N^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{p}$$

$$T_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \beta^{M-1} & \dots & \beta^{(M-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{p}$$

$$T_M^{-1} = M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \beta^{-(M-1)} & \dots & \beta^{-(M-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{p}$$

(10)、(11)式分别为正向与反向 NTT 变换。由(10)、(11)两式可以看出在变换及逆变换过程中, 无三角函数, 且为整数运算, 不存在舍入误差, 可以大大提高算法的压缩比、编码速度和解压精度。

3 NTT 在图像压缩中应用的新设想

由 2.1 节可见 DCT 是最为接近 KLT 的正交变换, 已应用于国际标准 JPEG 和 MPEG 中。但由于 DCT 在压缩与解压过程中必须存储基本函数, 并且有舍入误差, 这就影响了它的压缩比、编码速度和解压精度。由 2.2 节我们看到 NTT 是以数论为理论基础的数据压缩算法。数论变换的变换矩阵中不存在三角函数, 它不需要存储基本函数, 且无舍入误差。由分析可见: NTT 比 DCT 变换方法会有更大的压缩比、更快的编码速度和更高的解压精度。特别令人兴奋的是, NTT 中的一类称为 Fermat 数变换^[7](简称 FNT), 只需进行 $N \log_2 N$ 阶的加法及移位操作来代替复数乘法运算, 从而大大提高运算速度。因此 NTT 在图像压缩技术中将会有很好的应用前景。

在 NTT 变换算法的基础上, 我们将进一步分析验证其快速算法及其在图像压缩中的应用效果。

(下转第 85 页)

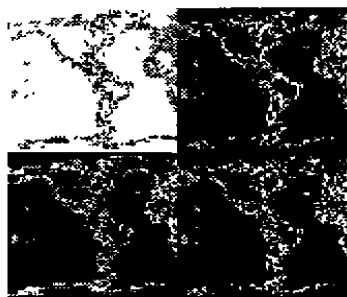


图2 (a)图一层多小波分解

(9)和(10)是多小波的分解重构公式,从公式中可以看出,只要确定了 $C_{1,k}$,就能用 Mallat 算法进行多小波的分解和重构。在单小波中 $C_{1,k}$ 来自采样值 $f(k/2^l)$,但在多小波中,一方面由于单序列的采样值 $f(x)$ 与矩阵 $C_{1,k}$ 之间的对应是不平凡的,另一方面,因为现在所构造的多小波多数不满足低通特性($H(0)=I$),所以不可避免要作平衡处理。

例:有一幅世界地图被摄像成两幅(如:图1),现要将其拼接,对其进行三层 Opt-rec 多小波变换(图2)后,将两幅地图在变换后的频率域作拼接,因为此时只要在高频部分的边界作对应比较,很容易实现拼接,此时再作成一幅完整的图像重构回来(图3),即可实现无边界效应的图像融合。由于多小波基的精确重构特性,使得最后的图像非常完整。

参考文献

- 1 Jiang Qingtang. On the Design of Multifilter Banks and Orthonormal Multiwavelet Banks. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(12): 3292~3302
- 2 Alpert B K, Rokhlin V. A fast algorithm for the evaluation of Legendre expansions. SIAM J. Sci. Comput., 1991, 12: 158~179
- 3 Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity r.

(上接第78页)

参考文献

- 1 Wallace C K. The JPEG still picture compression standard. CAM, 1991, 34(4): 30~45
- 2 Sikora T. The MPEG-4 Video standard Verification Model. IEEE Trans. CVST, 1997, 7(Feb)
- 3 蒋泰,等. 分形图像压缩技术研究. 华东工业大学学报, 1997, 19(4): 65~70
- 4 徐佩霞,等. 小波分析与应用实例. 中国科学技术大学出版社, 1996
- 5 Agarwal R C, Burrus C S. Fast digital convolution using

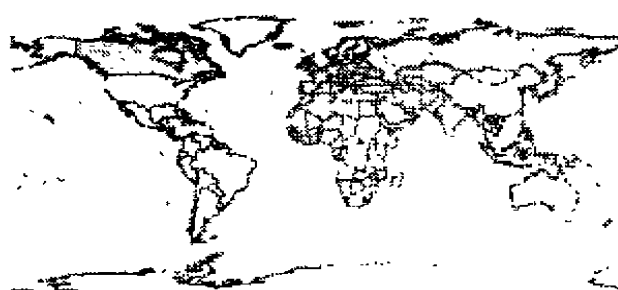


图3 重构的拼接图

- Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 342(1): 307~324
- 4 Lebrun J, Vetterli M. Balanced multiwavelets theory and design. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(4): 1119~1125
- 5 Geronimo J S, et al. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. J. Approx. Theory, 1994, 78: 373~401
- 6 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF Regional Conf., Ser. in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1992
- 7 Chui C K, Lian J -a. A study of orthonormal multiwavelets. Appl. Numer. Math., 1996, 20(3): 273~298
- 8 Wasin D K, et al. Global support of a scaling vector. Appl. Comput. Harmonic Anal., 1998, 5: 493~498
- 9 Xia X -G. A new prefilter design for discrete multiwavelet transforms. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(6): 1558~1570
- 10 Bui T D, Chen G. Translation-Invariant Denoising Using Multiwavelets. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(12): 3474~3480
- 11 Srrang G, Strela V. Short Wavelets and matrix dilation equations. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, 43: 108~115
- 12 Donovan G G, et al. Intertwining multiresolution analyses and the construction of piecewise-polynomial wavelets. SIAM J. Math. Anal., 1996, 27(5): 1791~1815

Fermat transforms. SWIEEEO. Record, 1973: 538~543

- 6 Agarwal R C, Burrus C S. Fast convolution using Fermat number transforms with application to digital filtering. IEEE Trans., Acoustics, Speech, and Singal Processing, 1974, 22: 87~97
- 7 Agarwal R C, Burrus C S. Number theoretic transforms to implement fast digital convolutioin. PIEEE., 1976, 63: 216~225
- 8 高文. 多媒体数据压缩技术. 电子工业出版社, 1994
- 9 杨品,等. 图像压缩技术的分析与评价. 清华大学学报, 1995, 35(4): 48~54