

正则 Petri 网的研究

Research on Full Rank Petri Nets

熊超越 丁国俊

(上海交通大学自动控制系 上海 200030)

Abstract State equation method based on incidence matrix, which shows the structural property of Petri Nets, has been used widely in the reachability analysis of Petri Nets. However, due to the state explosion, the complexity of this method increased exponentially when the rank of this incidence matrix is not full. So in this paper, a new Petri Net model — full rank Petri Net has been proposed to solve this problem.

Keywords Petri Net, Full-rank Petri Net, Sink transition, Incidence matrix, Firing count vector

1 引言

Petri 网^[1,2]是一种描述和分析异步并发系统的工具,其可达性对所模拟系统的状态可达研究非常重要,因此具有非常重要的理论和应用价值,也吸引了很多 Petri 网理论工作者去研究这个问题。其中, T. Murata^[3,4]的工作很有代表性,他提出了状态方程法。这种方法使得对 Petri 网可达性的研究和代数分析方法结合了起来,因而非常简洁。

但是我们发现,由于状态爆炸,在解状态方程时,当发生率矩阵不满秩时,用高斯迭代法或其它方法求解点火次数向量时,计算量非常庞大,因而速度非常缓慢。因此,我们设想能否构造一种 Petri 网,它能保证 Petri 网的发生率矩阵满秩,从而减少计算量。为此,我们在本文中提出了一种新的 Petri 网模型——正则 Petri 网模型。这种 Petri 网模型保证发生率矩阵满秩。不过在一般情况下建立的 Petri 网不一定是正则的,因此本文在最后给出将不正则 Petri 网转化为正则 Petri 网的方法步骤。

2 基本概念^[3,4,7]

Petri 网是异步并发系统建模与分析的一种重要工具,它在很多场合都得到了越来越重要的运用。下面我们先给出 Petri 网的形式化定义:

定义 1 Petri 网是一个五元组: $PN = (P, T;$

$F, W, M)$ 。其中:

(1) $(P, T; F)$ 是一个有限网, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 是库所集合; $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 是变迁集合; $F \in (T \times P) \cup (P \times T)$ 是弧的集合。

(2) $W: F \rightarrow N^+$ 是弧上的权函数, $N^+ = \{1, 2, \dots\}$

(3) M_0 是初始标识。

(4) Petri 网具有下面的点火规则: (a) $t \in T$ 称为在标识 M 下有资格点火, 当且仅当 $\forall p \in {}^*t: M(p) \geq 1$, 此时记为 $M[t >]$; (b) 若 t 在 M 下有资格点火, 则 t 可以点火, 点火后得到新的标识 M' , 并记为 $M[t > M']$:

$$M'(p) = \begin{cases} M(p) + 1 & p \in t^- - t^+ \\ M(p) - 1 & p \in {}^*t - t^+ \\ M(p) & \text{其它} \end{cases}$$

定义 2 对于一 $n \times m$ 的矩阵 A , 如果存在一 $m \times n$ 的矩阵 B , 使 $AB = E_{n \times n}$, 则称 A 有右逆。

定义 3 对于一 $n \times m$ 的矩阵 A , 如果存在一 $m \times n$ 的矩阵 B , 使 $BA = E_{m \times m}$, 则称 A 有左逆。

为方便起见, 矩阵 A 有右逆或左逆都记为 A^- 。对于一 $n \times m$ 的矩阵 A , A 有右逆等价于 A 的行满秩, 即 A 的秩 $r(A) = n$ 。 A 有左逆等价于 A 的列满秩, 即 A 的秩 $r(A) = m$ 。

A 为一 $n \times m$ 的矩阵, 对于线性方程组 $Ax = b$ 。如果 A 为行满秩或列满秩, 即 A 有右逆或左逆时,

我们这里为方便起见,把 A 的左逆或右逆都记为 A^{-} ,则 $x=A^{-}b$ 就是所要求的解的表达式。

3 Petri 网的状态方程

迄今为止,人们对 Petri 网已形成了不少专门的研究方法。其中之一是代数分析方法,代数分析方法即状态方程法。所谓的状态方程法,就是找到满足状态方程的非负整数解 x 。 x 表示变迁点火次数向量。对 Petri 网作可达性分析时,这个向量是非常重要的,它能大大降低求变迁序列的复杂程度。

给定一个 Petri 网 (N, M_0) ,并已知其目标标识 M ; M 和 M_0 表示为 P 向量形式,相应的状态方程描述为:

$$A^T x = M - M_0 \quad (1)$$

这里 A 称为发生率矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵。 $A = [a_{ij}]_{n \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{变迁 } i \text{ 和库所 } j \text{ 之间无任何弧连接;} \\ -1 & \text{库所 } j \text{ 就是变迁 } i \text{ 的输入库所;} \\ 1 & \text{库所 } j \text{ 是变迁 } i \text{ 的输出库所。} \end{cases}$$

x 是点火次数向量, $x = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]^T$, $x(t_i)$ 表示变迁 t_i 的点火次数; M 是目标标识, M_0 是初始标识。

4 正则 Petri 网及其定义

在用状态方程求解时,由于状态爆炸,如果用一般方法,在矩阵不满秩时,该方程的求解复杂程度呈指数式增加,求解速度有时会非常缓慢。为了解决这个问题,下面我们提出一种新的 Petri 网模型,它保证矩阵满秩,从而在一定程度上缓解了这个问题。

定义 4 正则 Petri 网是一个五元组: $PN = (P, T; F, W, M)$ 。其中:

(1) $(P, T; F)$ 是一个有限网, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ 库所集合; $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 变迁集合; $F \in (T \times P) \cup (P \times T)$ 弧的集合。

(2) $W: F \rightarrow N^+$ 是弧上的权函数, $N^+ = \{1, 2, \dots\}$ 。

(3) M_0 是初始标识。

(4) 它的发生率矩阵的秩: $r(A) = \min(m, n)$, 即 A 为满秩。

但是根据实际情况建立的 Petri 网模型往往不是正则 Petri 网,这样一来,研究如何把不正则 Petri 网模型转化为正则 Petri 网模型是有现实意义的。

5 由不正则转化为正则

首先我们给出终止变迁的定义:

定义 5 对于一个 Petri 网,如 $t \in T$, 且 $t' = \Phi$, 则称该变迁 t 为终止变迁。

由定义可知,当终止变迁被点火后,它不会对 Petri 网的其余部分产生任何影响,因而我们可推知,在 Petri 网中添加终止变迁不会改变原 Petri 网的物理特性。然而,添加终止变迁却会改变 Petri 网的发生率矩阵 A 。添加后,发生率矩阵 A 中相应地增添了几行和几列。基于这种思想,我们可以说,对于任一个不正则的 Petri 网,总可以通过添加终止变迁,改变 Petri 网的结构,使发生率矩阵 A 满秩,从而把 Petri 网改造成正则 Petri 网。

由 Petri 网改造成正则 Petri 网的步骤如下:

1. 写出 Petri 网的发生率矩阵 A ; A 为一 $n \times m$ 的矩阵,其中 n 是 Petri 网的变迁总数, m 是 Petri 网的库所总数。

2. 求出 A 的秩 $r(A)$, 并在 A 上添加单位矩阵 $E_{r \times r}$, 其中 $r' = \min(n, m) - r$, 转化后的矩阵记为 A'

$$A' = \begin{bmatrix} A & \\ O_{r \times r} & -E_{r \times r} \end{bmatrix}$$

此时 A' 的秩:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A') &= \text{rank}(A) + \text{rank}([O_{r \times r} - E_{r \times r}]) = \\ &= r + r' = r + \min(n, m) - r = \\ &= \min(n, m) \end{aligned}$$

这样一来,经过上述变换后,显然 A' 的行或列是满秩的,它所对应的 Petri 网是正则的。记 A' 的转置矩阵为 A'^T , 由于任一矩阵的秩等于它转置矩阵的秩,所以 A'^T 也是满秩的, A'^T 的左或右逆存在。为方便起见,把 A'^T 的右逆或左逆都记为 $(A'^T)^{-}$ 。

3. 根据 A 在原 Petri 网相应位置加上适当的变迁,由发生率矩阵的构造特点以及 A' 的特点可知,这些变迁是终止变迁,对原 Petri 网的物理特性不会产生影响。

到现在为止,我们已把不正则的 Petri 网改造成了正则的 Petri 网。改造后的 Petri 网实际上是通过在原 Petri 网的适当库所处添加适当的终止变迁得到的。所以现在我们可得出变换后的正则 Petri 网的状态方程为:

$$A'^T x' = M - M_0$$

(下转第 81 页)

确定性关系模型的语义。

定理 2 对于不确定性模式 R 的每一个不确定性世界 $UW(R)$, 设 $UW(R) = \langle T, P \rangle = \{(T_1, P_1), (T_2, P_2), \dots, (T_k, P_k)\}$, 则有: $P_1 + P_2 + \dots + P_k = 1$, 其中 $k=2^n$ 。

该定理可用数学归纳法证明, 这里省略。

下面举例说明。设有一不确定性关系如下:

姓 名	年 龄	身 高	P	
李 平	大约 30	1.65 左右	0.9	t_1
王 敏	大约 20	1.59 左右	0.2	t_2
张 明	大约 50	1.73 左右	0.5	t_3
胡 军	大约 28	1.51 左右	0.8	t_4

则它的不确定性世界为:

4 元组世界
$\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ 0.072
3 元组世界
$\{t_1, t_2, t_3\}$ 0.018 $\{t_1, t_2, t_4\}$ 0.072
$\{t_1, t_3, t_4\}$ 0.288 $\{t_2, t_3, t_4\}$ 0.008
2 元组世界
$\{t_1, t_2\}$ 0.018 $\{t_1, t_3\}$ 0.072 $\{t_1, t_4\}$ 0.288
$\{t_2, t_3\}$ 0.002 $\{t_2, t_4\}$ 0.008 $\{t_3, t_4\}$ 0.032
1 元组世界
$\{t_1\}$ 0.072 $\{t_2\}$ 0.002 $\{t_3\}$ 0.008 $\{t_4\}$ 0.032
0 元组世界
$\emptyset$ 0.008

总结 本文建立了一个不确定性数据库模型, 讨论了该模型的有关概念, 并构造了一个不确定性关系代数, 证明了不确定性范式在该关系代数操作下是封闭的。该模型的特点是: (1)它是传统关系模

型的扩展, 即对属性和元组进行不确定性化; (2)它既体现了认知的不确定性, 又体现了概率的不确定性, 能有效地反映客观现实; (3)它有明确的定义; (4)它还可以进行推广, 如对概率因子 P 可以象其它属性一样进行不确定性化等等。

不确定性数据库容易与其它数据库结合起来形成新的数据库, 如: 不确定性数据库与时态数据库结合可形成不确定性时态数据库, 与演绎数据库结合可形成不确定性演绎数据库等等。有关这方面的工作, 我们将另文研究。另外, 不确定性数据库的应用前景很广阔, 笔者希望借本文抛砖引玉。

参 考 文 献

- 1 何新贵. 模糊关系数据库的数据模型. 计算机学报, 1989(2): 120~126
- 2 张师超, 等. 一个模糊时态关系代数. 软件学报, 1994(9): 59~64
- 3 Gupta M M. Intelligence, uncertainty and information, Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications, 1992: 3~11
- 4 Yu Hairong, Ramer A. A Combined Approach to Uncertain Data Analysis. In: Liu X, Cohen P, Berthold M, eds. Advances in Intelligent Data Analysis (IDA-97). LNCS 1280, 1997. 123~134
- 5 Pittarelli M. An Algebra for Probabilistic Databases. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1994, 6(2): 293~302
- 6 Buckles B P, Pntry F E. A Fuzzy Representation of Data For Relational Database. Fuzzy Sets and Syst, 1982(7): 213~226

(上接第 89 页)

因为 A^T 满秩, 其左逆或右逆存在, 所以:

$$x' = (A^T)^{-1} \times (M - M_0)$$

其中, $x' = (x, x_a)^T$

x 是原 Petri 网的点火次数向量, x' 是变换后的正则 Petri 网的点火次数向量, x_a 是添加的点火次数向量。

$$x = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]^T$$

$$x_a = [x(t_{n+1}), \dots, x(t_{n+r})]^T$$

到此为止, 我们就已算出点火次数向量。

参 考 文 献

- 1 Reisig W. Petri Nets: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1985

- 2 Peterson J L. Petri Net Theory and the Modeling of Systems. Prentice-Hall, Inc., England Cliffs, N. J. 07632
- 3 Murata T. State equation, controllability, and maximal matching of Petri nets. IEEE Transaction on Automatic Control, 1977, AC-22(3): 412~416
- 4 Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Procs. of the IEEE, 1989, 77(4): 541~580
- 5 Lee D, et al. Handles and reachability analysis of free choice nets. In: Proc. of the 16th Int. Conf. on Application and Theory of Petri Nets. LNCS 935. 1995. 298~315
- 6 Desel J. A structural property of free-choice nets. Petri Net Newsletters, 1986(25): 16~20
- 7 陈大新. 矩阵理论. 上海交通大学出版社