计算机科学 1999Vol. 26№. 6

基于α-截集表达的模糊贝叶斯网*)

Fuzzification of Bayesian Networks Based on α-Cut Sets Representation

程小平

(西南师范大学计算机科学系 重庆 400715)

Abstract Based on α-cut sets representation of fuzzy set, this paper has proposed an easily quantifiable approach to generalize Bayesian networks under fuzzy a prior and fuzzy sample data. The combination of bayesian statistics and fuzzy set theory will improve advanced fuzzy control to include stochastic information processing and higher level control knowledge representation. Also the approach can facilitate more natural and wider scope knowledge representation in Bayesian networks in general.

Keyworks Bayesian network, Fuzzy control, α-cut representation, Fuzzified conditional propability

1 引 言

对于非线性、大时滞,分布时变参数的工业过程对象,模糊控制是一种有效的控制方式[2]。近年来,模糊控制得到日益广泛的应用。一般而言,模糊控制器的内核实现控制误差及误差变化率到控制输出的映射,属于底层控制。一个完善的智能控制系统,应该具有综合高层控制知识的能力,并能够处理工业现场必然伴随的不可预测的随机干扰,并具有自学习、自校正功能。

贝叶斯网[5](又称随机信息网)作为一种专家知识表达和更新的建模方法,已成功地在医学诊断,模式识别、故障诊断等领域得到广泛的应用。贝叶斯网的递阶层次结构适宜于表达各类控制知识,构成递阶智能控制系统。类似于神经网络,贝叶斯网也具有很强的自学习功能。特别有价值的是贝叶斯网的统计推断性质,使其适宜表达工业过程中的随机过程信息。将贝叶斯网与模糊控制相结合,可以期望较好地对兼有统计不确定性和模糊不确定性的工业过程对象加以优化控制。

为此,必须对贝叶斯网的适用范围进行拓展,使其能够处理模糊信息。本文以模糊集的α-截集表达及Zadeh等提出的扩展原理[1]为基础,推导一种可以处理模糊先验概率和模糊样本数据的贝叶斯网基本参数更新算法。除控制领域外,本方法也适合于应用贝叶斯网的其它领域。

2 基于α-截集的模糊映射

模糊集的α-截集将模糊集合与普通集合相联系[2],是模糊数运算,模糊函数分析的重要理论工具。

2.1 模糊集的α-截集

定义

A 为论域 U 中的模糊集合,$\mu_A(x)$ 为隶属函数,集合 $A_\alpha=\{x|\mu_A(x)\geqslant\alpha\}\forall\ \alpha\in[0,1]$ 称为 A 的 α-截集。α 称为阈值或置信水平。

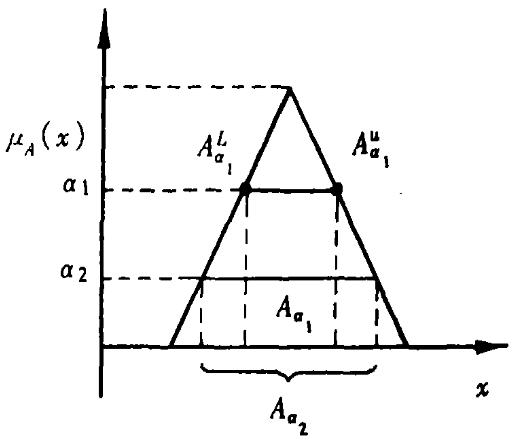

图1 模糊集的α-截集

*)受重庆市科委攻关项目《模糊贝叶斯网及其应用研究》资助。

称 $\mathrm{Ker}(A)=A_1$ 为模糊集 A 的核。

称 $\mathrm{Supp}(A)=A_0=\{x|x\in u,\mu_A(x)>0\}$ 为 A 的支撑集。

对于 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，有：$A\alpha_1\supseteq A\alpha_2$。$A$ 的截集族 $\{A_\alpha\}\alpha\in[0,1]$ 是 U 上的一个集合套[2]。

2.2 分解定理与隶属函数的 α-截集表达

分解定理 A 是论域 U 上的模糊集合，$\mu_A(x)$ 是它的隶属函数，则有下式成立：

$$\mu_A(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x))$$

式中 $I_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1 & x\in A_\alpha\\ 0 & x\overline{\in} A_\alpha\end{cases}$

是 A_α 集合的特征函数。

证明：

$$\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x))=[\bigvee_{\alpha>\mu_A(x)}\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x)]\vee[\bigvee_{\alpha\leqslant\mu_A(x)}\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x)]$$

当 $\alpha>\mu_A(x)$ 时，$x\overline{\in} A_\alpha$，$I_{A_\alpha}(x)=0$；而 $\alpha\leqslant\mu_A(x)$ 时，$x\in A_\alpha$，$I_{A_\alpha}(x)=1$。故有：

$$\bigvee_{\alpha>\mu_A(x)}(\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x))=\bigvee_{\alpha>\mu_A(x)}(\alpha\wedge 0)=0$$

从而有：

$$\bigwedge_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge I_{A_\alpha}(x))=\bigvee_{\alpha\leqslant\mu_A(x)}(\alpha\wedge A_\alpha(x))=\bigvee_{\alpha\leqslant\mu_A(x)}(\alpha\wedge 1)=\mu_A(x)$$

由分解定理，模糊集 A 可以等价地用其 α-截集来表示：

$$A=[A_\alpha^L(x),A_\alpha^u(x)]\quad\forall\alpha\in[0,1]$$

式中 $A_\alpha^L(x)$ 表示 α-截集的左端点，A_α^u 表示 α-截集的右端点，$A_\alpha^L(x)\leqslant A_\alpha^u(x)\forall\alpha\in[0,1]$。文[4]中列出了三角模糊数，高斯模糊数，梯型模糊数的 α-截集区间端点表示的解析形式。这三种模糊数是模糊控制中最常用的隶属函数形式。

2.3 扩展原理及模糊映射

根据扩展原理[1]，模糊映射关系可以用源和象的 α-截集关系来表达。

命题 1 U,V 为两个论域，A 为 U 中模糊集，f 是 U 到 V 的映射：$f:U\to V$，则 $Y=f(A)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_\alpha)$。

证明：对于任意的 $\gamma\in v$，若 $f^{-1}(\gamma)\neq\varnothing$，则：

$$\mu_{\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}f(A_\alpha)}(\gamma)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\mu_\alpha(A_\alpha)(\gamma)$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\mu_{f(A_\alpha)}(\gamma)]=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\mu_{f(A_\alpha)}(\gamma)]$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge(\vee\mu_{A_\alpha}(\underset{x\in f^{-1}(\gamma)}{x}))]$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge(\vee\mu_{A_\alpha}(\underset{x\in f^{-1}(\gamma)}{x}))]$$

$$=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\bigvee_{x\in f^{-1}}(\gamma)(\alpha\wedge\mu_{A_\alpha}(x))$$

$$=\bigvee_{x\in f^{-1}(\gamma)}\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge\mu_{A_\alpha}(x))$$

$$=\bigvee_{x\in f^{-1}(\gamma)}\mu_{A(x)}=\mu_{f(A)}(\gamma)$$

上述命题可以形象地说明模糊映射 f。先将模糊集 A 用水平 α 切片表示，再依 f 依次将 A_α 由 U 中映射到 V 中，然后将所有的 $f(A_\alpha)$ 拼接起来即可得到 A 在 f 下的象 $f(A)$。

模糊映射可以用 α-截集形式表达：

$$Y_\alpha(\gamma)=[\min_{x\in A_\alpha(x)}f(x),\max_{x\in A_\alpha(x)}f(x)],\forall\alpha\in[0,1]$$

2.4 模糊条件概率

贝叶斯定理中条件概率 $f(\omega/x)$ 可以看成是 $x\to f(\omega/x)$ 的映射，按上一节，则条件概率的 α-截集表达式为：当 $x\in A$，A 为模糊集：

$$f_\alpha^L(\omega)=\min_{x\in A_\alpha(x)}f(\omega/x)$$

$$f_\alpha^u(\omega)=\max_{x\in A_\alpha(x)}f(\omega/x)\quad\forall\omega\in R$$

3 模糊贝叶斯网的 α-截集表达

常规贝叶斯网中，各节点的先验概率及有向弧表达的递阶分层条件概率表(CPT)是清晰量。这限制了对具有语言变量特征的模糊控制专家知识的表达。贝叶斯网的模糊性可由两个途径引入：a)模糊条件概率；b)模糊先验概率。将上述两类模糊性纳入贝叶斯网后，就可以对模糊专家知识进行统计推断。

3.1 仅含模糊样本数据的贝叶斯网

对于精确样本数据向量 x，贝叶斯网后验参数 θ_i 为：

$$P(\theta_i/x)=\frac{P(\theta_i)\cdot P(x/\theta_i)}{\sum_i P(\theta_i)P(x/\theta_i)}$$

在离散参数贝叶斯网中[5]：

$$P(x/\theta_i)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i/\theta_i)$$

如果先验概率 $P(\theta_i)$ 是精确量，只有样本数据 x 为模糊量，那么只有条件概率 $P(x/\theta_i)$ 为模糊量。按照 2.4 节，后验概率可用 α-截集表达为：

$$P_\alpha^L(\theta_i/x)=\frac{P(\theta_i)P_\alpha^L(x/\theta_i)}{\sum_i P(\theta_i)P_\alpha^L(x/\theta_i)}$$

$$P_\alpha^u(\theta_i/x)=\frac{P(\theta_i)P_\alpha^u(x/\theta_i)}{\sum_i P(\theta_i)P_\alpha^u(x/\theta_i)}$$

其中 $P_\alpha^L(x/\theta_i)=\min\limits_{x_i\in A_\alpha(x_i)}\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i/\theta_i)$

$$P_\alpha^u(x/\theta_i)=\max_{x_i\in A_\alpha(x_i)}\prod_{i=1}^{n}f(x_i/\theta_i)$$

(下转封四)

（上接第 66 页）

3.2　含模糊先验概率的贝叶斯网

如果贝叶斯网中数据样本条件概率值 $P(x/\theta_i)$ 为精确值，只有先验概率 $P(\theta_i)$ 为模糊值，则网络后验参数的模糊性仅由 $P(\theta_i)$ 的模糊性传播而来。仿 3.1 节的推导，容易求得贝叶斯网络后验参数的 α-截集表达：

$$P_\alpha^L(\theta_i/x)=\frac{P_\alpha^L(\theta_i)P(x/\theta_i)}{\sum\limits_i P_\alpha^L(\theta_i)P(x/\theta_i)}$$

$$P_\alpha^u(\theta_i/x)=\frac{P_\alpha^u(\theta_i)P(x/\theta_i)}{\sum\limits_i P_\alpha^L(\theta_i)P(x/\theta_i)}$$

对于模糊控制中常用的简单隶属函数[4]，容易求得 $[P_\alpha^L(\theta),P_\alpha^u(\theta)]$ 的解析表达式。

综合上述两种情况，可得出既含模糊数据样本条件概率又含模糊先验概率的模糊贝叶斯网后验参数更新通式：

$$P_\alpha^L(\theta_i/x)=\frac{P_\alpha^L(\theta_i)P_\alpha^L(x/\theta_i)}{\sum\limits_i P_\alpha^L(\theta_i)P_\alpha^L(x/\theta_i)}$$

$$P_\alpha^u(\theta_i/x)=\frac{P_\alpha^u(\theta_i)P_\alpha^u(x/\theta_i)}{\sum\limits_i P_\alpha^u(\theta_i)P_\alpha^u(x/\theta_i)}$$

结果讨论　模糊集合的 α-截集是实现由模糊集合转化成普通集合的媒介，本文给出了在贝叶斯网中引入模糊先验概率和模糊样本数据时，其网络后验参数的 α-截集与模糊条件的 α-截集的关系。理论上，通过 α-截集构造贝叶斯网中后验参数要取 α∈[0,1]区间上的每一个值，涉及无穷多次运算。但对于模糊控制问题，隶属函数较为简单，取有限个 α 值，推导出对应的后验参数 α-截集值，然后对这些值进行插值，其精度足以满足工程需要。特别是对于控制工程中广泛采用的三角模糊隶属函数，采用简单线性插值就能得出相当好的结果。因此，本文的研究，为实现贝叶斯模糊控制器，提供了一种现实可行的方法。

参考文献

1　Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and Systems. Theory and Application, 1980

2　刘有才，刘增良．模糊专家系统原理与设计．北京航空航天大学出版社，1995

3　张俊福，等．应用模糊数学．地质出版社，1988

4　章正斌，等．模糊控制工程．重庆大学出版社，1995

5　Heckerman D, Wellman M. Bayesian networks. CACM, 1995, 38(3): 27～30

6　Buntine W L. An aid to the literature on learning probabilistic networks from data. IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 1996, 8: 195～210

计算机科学

（1974 年 1 月创刊）

第 26 卷第 6 期（月刊）

1999 年 6 月 25 日出版

中国标准刊号：ISSN 1002-137X / CN51—1239/TP

定价：7.50 元　国外定价：5 美元

邮发代号：78—68

发行范围：国内外公开

主管单位：国家科学技术部

主办单位：国家科技部西南信息中心

编辑出版：《计算机科学》杂志社

重庆市渝中区胜利路 132 号　邮政编码：400013

电话：(023) 63500828　传真：(023) 63502473

主　　编：朱宗元

印 刷 者：国家科技部西南信息中心印刷厂

总发行处：重庆市邮政局

订 购 处：全国各地邮政局

国外总发行：中国国际图书贸易总公司（北京 399 信箱）

国外代号：6210M