

一类推广割线法的特性研究及其分形图^{*})

Characters Researching of One Class Generalized Secant Methods and Their Chaotic Fractal Images

刘向东 焉德军 朱伟勇

(东北大学信息工程学院计算中心 沈阳 110006)

Abstract Newton's method and generalized Newton's methods are efficient and convenient tools for constructing chaotic fractal images, and have been widely investigated in recent years. This paper gives a class generalized Newton's methods that come from Secant method, and constructs their chaotic fractal images to support the analyses of their algorithm.

Keywords Secant method, Chaotic fractal images, Steffensen method

Newton 法是计算方程与方程组根的非常有效数值方法, Arthur Cayley 于 1879 年对该迭代过程进行了研究, 他从 $z^2=c$ 开始, 接着试解 $z^3=c$, 但方程的找不到解决方法的三个“灰色区域”难住了他; 法国的 Gaston Julia 于 1917 年发现了许多有关这些区域的事实, 并发现了这一方法对估计初值的某种敏感依赖关系, 以他的名字命名了这些“灰色区域”—Julia 集; 而美国数学家 John H. Hubbard 利用计算机向人们展示了这些相应 Julia 集的最早图形, 开创了利用这一方法构造混沌分形图进而进行算法分析的先河^[1]. 通过计算机实验数学的分析, 由一系列不同的算法构造混沌分形图, 不仅从艺术上, 而且从理论上可以对算法有一个更加深入的了解, 使得这一方法为国内外混沌分形学者所瞩目. 之后, 国内外许多混沌分形学者对这一问题进行了进一步的推广研究, David John Walter 对只有有限个单根的简单情况进行了分析^[2], 这是 $z^3=c$ 的自然推广; 在此基础上, William J. Gilbert 对有重根的情况进行了分析, 并通过两个不同的改进方法—对重根的 Newton 法与松弛的 Newton 法进行了对比分析^[3], 得到了两个算法适应性特点的一系列结果; 进而许多学者对有无无穷多个单根的情况进行了分析, 即将 $e^z=c$ 看作 $z^p=c$ 的当 $p \rightarrow \infty$ 时的适当的极限; Mieczyslaw Szyszelewicz, John Dewey Jones 和 David Walter 对

割线法进行了分析^[4,5], Mark A. Motyka 和 Clifford A. Reiter 对二元简单的方程组(无重根, 只有单根的简单情况)进行了分析^[6].

Newton 法的推广一般基于下面两个原则进行: (1) 便于计算的原则, 主要方法为减少导数的计算或完全避免导数的计算; (2) 提高收敛速度与对重根的适应性的原则, 主要方法为通过寻找合适的高阶方法(迭代过程中要计算二阶或二阶以上的导数).

本文通过对不同的改进 Newton 法分析、综合, 得到一类推广的割线法; 在复平面上构造它们相应的混沌分形图, 通过计算机实验数学的分析, 比较了算法之间的联系与差异, 对其特性进行了深入的分析.

1 割线法

割线法是为简化导数计算的 Newton 法的改进算法, 算法的核心思想是在迭代过程中用割线的斜率代替曲线的斜率, 迭代公式为:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{hf(x_i)}{f(x_i+h) - f(x_i)} \quad (1)$$

其中, h 为事先预定的一模很小的数.

该方法当 h 取得模比较小时, 其收敛速度相当高, 在单根附近收敛阶数为 1.618^[7], 比 Newton 法

^{*} 本文得到国家博士点学科专项科研基金(97014510)及辽宁省自然科学基金(962177)项目资助。刘向东 讲师, 博士研究生, 主要研究领域为混沌分形计算机证明与构造。焉德军 讲师, 博士研究生, 主要研究领域为混沌分形计算机证明与构造。朱伟勇 教授, 博士生导师, 辽宁省科协副主席, 主要研究领域为混沌分形最优设计计算机证明与构造。

稍差,对含重根的情况适应性也较差;另外,这一方法 h 对计算精度的影响较大。

2 Steffensen 法及其推广

由于应用割线法迭代时要依赖于预定的 h ,使得迭代不能唯一地由初始点决定, h 的引入不仅增加了算法实现的困难,还对计算精度产生较大的影响,于是引发了从迭代本身构造 h 的想法,这就导出了 Steffensen 法。

2.1 Steffensen 法及其混沌分形图

2.1.1 Steffensen 法及性质. Steffensen 法是割线法的改进,由于当迭代成功时(即算法收敛到方程的某一根上) $f(x)=0$,自然地想到用 $f(x_k)$ 代替割线法中的 h ,得:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^2}{f[x_k + f(x_k)] - f(x_k)} \quad (2)$$

该算法取消了 h ,使得迭代可以脱离 h 进行。下面定理表明在适当的条件下,该方法和 Newton 法一样,具有平方收敛速度,即优于割线法的收敛速度,同时也分析了该方法对重根的适应性。

定理 1 对多项式方程 $f(x)=0$,当 $f(x)$ 的次数大于 2 时,迭代(2)满足:

(i) 迭代的全部不动点为 $f(x)=0$ 的根及无穷远点 ∞ , ∞ 是迭代(2)的中性不动点;

(ii) 方程 $f(x)=0$ 的单根是迭代对应的超吸引不动点,在这些点附近迭代(2)二次收敛;

(iii) 方程 $f(x)=0$ 的二重根对应迭代(2)的不动点是线性吸引的,吸引率为 0.5。

证明 构造

$$S(x) = x - \frac{[f(x)]^2}{f[x+f(x)] - f(x)} \quad (3)$$

迭代的性质对应了有理函数 $S(x)$ 的性质。

$$S'(x) = 1 - \frac{2f(x)f'(x)}{f(x+f(x)) - f(x)} + \frac{f^2(x)[f'(x+f(x))(1+f'(x)) - f'(x)]}{[f(x+f(x)) - f(x)]^2} \quad (4)$$

(i) 很明显, $S(x)$ 的全部不动点为 $f(x)=0$ 的根及 ∞ , x 充分大时, $S(x) \sim x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} S'(x) = 1$, 所以 ∞ 是迭代(2)的中性不动点。

(ii) 若 x_0 是 $f(x)=0$ 的单根,则 $f(x_0)=0$, 而 $f'(x_0) \neq 0$, 这时 $\lim_{x \rightarrow x_0} S'(x) = 0$, 从而 x_0 是迭代的超吸引不动点。所以方程的单根都是迭代的超吸引不动点。

记 $f(x) = (x - x_0)Q(x)$, 其中 $Q(x_0) \neq 0$, 通过极限 $\lim_{\substack{x_n \rightarrow x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n)}} \frac{x_{n+1} - x_0}{(x_n - x_0)^2} = \frac{f'(x)Q'(x)[1+Q(x)]}{[Q(x)]^2}$

可知,在 x_0 点附近迭代(2)是二次收敛的。

(iii) 若 x_0 是 $f(x)=0$ 的二重根,则 $f(x_0)=f'(x_0)=0$, 而 $f''(x_0) \neq 0$, 这时 $\lim_{x \rightarrow x_0} S'(x) = 0.5$, 从而是迭代(2)的吸引不动点,所以 $f(x)=0$ 的重根是迭代(2)的吸引不动点,吸引率为 0.5。

2.1.2 Steffensen 法构造混沌分形图。以计算机屏幕点的屏幕坐标变换得复空间的初始估计点坐标,然后利用迭代公式(2)迭代 5000 次,5000 次后若迭代点收敛到 $f(z)=0$ 的某个根的附近(距离 < 0.001),根据收敛到不同的根画出不同的颜色,而不收敛到任何根的点不着色,这样就得到对应算法的分形图,图中白色区域的大小反映了算法的适应性,白色区域越大说明算法对初始估计的准确性要求越高。

图 1(a)、(b)、(c)为对方程 $z^3-1=0, z^4-1=0, (z-1)(z^3-1)=0$ 应用 Steffensen 法构造的混沌分形图,由于图中存在白色区域,说明 Steffensen 法不能保证在整个复平面上除不可运算的点都收敛到原方程的某个根上,这在一定程度上限制了它的应用范围,但由解析分析该算法并没有新增加吸引根,而白色区域中的点迭代下也不会缓慢趋于 ∞ ;与割线法相比,其单根收敛阶数高,对含重根的情况与 Newton 法类似,这时重根是迭代对应的吸引不动点,吸引率为 0.5,不随多项式次数增加而变小,具有一定的优势,但重根对应的吸引域变得很大(图 1(c)中灰色连通部分),而其它单根对应的吸引域却变得很小,使算法很难迭代到其它的单根上。

2.2 组合 Steffensen 法及其混沌分形图

由于 Steffensen 法对初始的估计比较敏感,尽管在估计合理时算法的收敛性质与对重根的适应性都有一定的优势,但初始估计不好时 $f(x_k)$ 的模较大,导致导数值的估计偏差过大而使算法失效,这样就限制了它的应用范围;为消除这一影响,考虑利用标准 Newton 迭代组合 Steffensen 迭代,利用 Newton 迭代对初值的适应性来减少整个算法对初值的依赖程度;算法对应迭代:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} & k \text{ 为奇数} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{[f(x_k)]^2}{f[x_k + f(x_k)] - f(x_k)} & k \text{ 为偶数} \end{aligned} \quad (5)$$

改进后算法在方程单根处至少是二次收敛的;图 2(a)、(b)、(c)为利用组合法构造的混沌分形图,图中不再有白色区域,说明这一改进大大提高了算

法对初始估计值的适应性,使算法对整个复平面上点都能收敛到原方程的某个根上,同时也削减了 ∞ 对算法的不良影响,此时 ∞ 成为迭代的斥性不动点;但也可以看出,这时每个根对应吸引域的边界变得更加不规则。

2.3 修改的 Steffensen 法及其混沌分形图

从提高算法对初始估计适应性的角度出发,在 Steffensen 法中加入松弛因子 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,即令 $h_k = \alpha f(x_k)$,得到带松弛因子的 Steffensen 法,对应迭代:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha [f(x_k)]^2}{f[x_k + \alpha f(x_k)] - f(x_k)} \quad (6)$$

通过类似的讨论可以得到:

定理 2 对多项式方程 $f(x)=0$,当 $f(x)$ 的次

数大于 2 时,迭代(6)满足:

(i) 迭代的全部不动点为 $f(x)=0$ 的根及无穷远点 ∞ ,且 ∞ 是迭代(6)的中性不动点;

(ii) 在方程 $f(x)=0$ 的单根附近迭代(6)是二次收敛的;

(iii) 方程 $f(x)=0$ 的二重根处,对应迭代(6)的不动点是吸引的,吸引率为 0.5。

由定理 2, α 并没有显著提高迭代的收敛速度,但是由这一方法构造的混沌分形图表明迭代(6)在 α 较小时改善了算法对初始估计的适应性,图 3(a)、(b)、(c)为利用带松弛因子 α 的 Steffensen 法构造的混沌分形图,图中显示了随着 α 变大每个根的吸引域逐渐变小的过程。

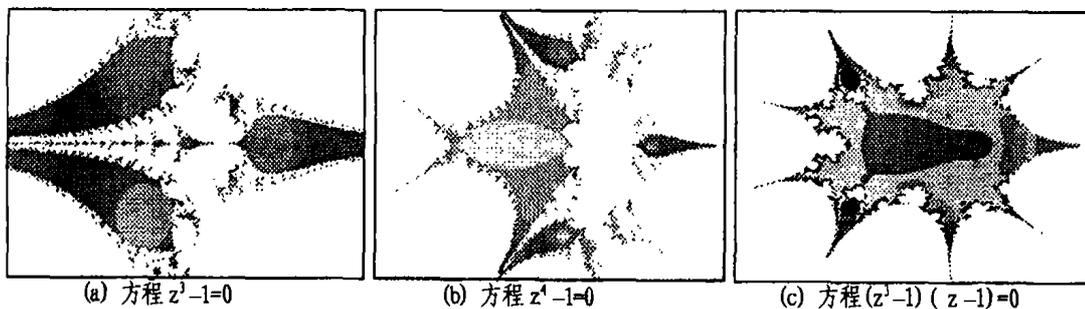


图 1 应用 Steffensen 法构造的混沌分形图

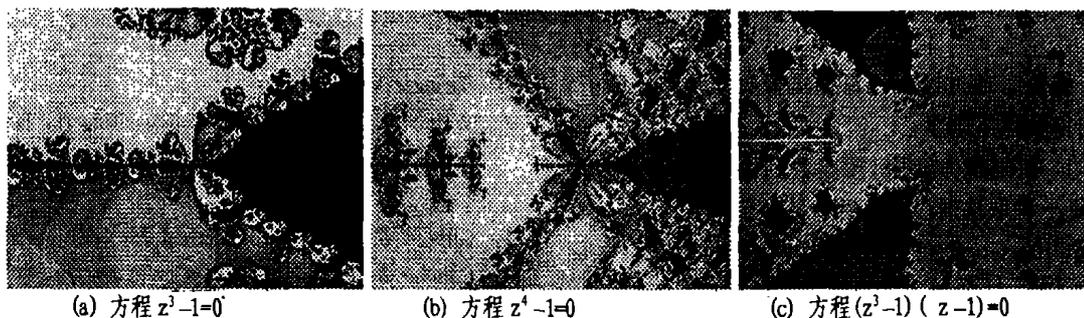


图 2 应用混合法构造的混沌分形图

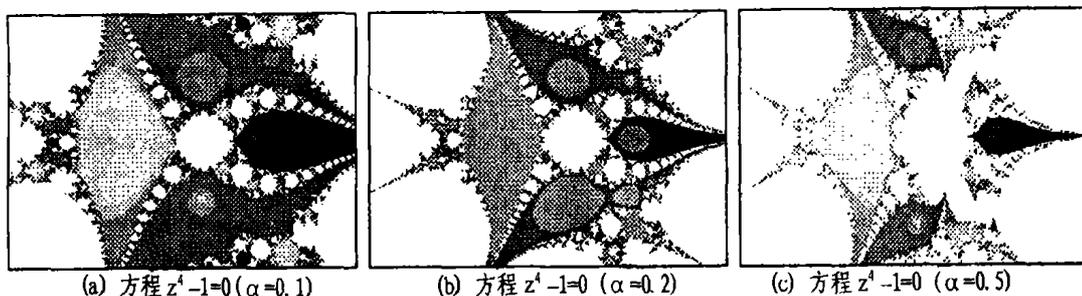


图 3 应用迭代(6)构造的混沌分形图

对 Steffensen 法还可以有多种修改方案,从构造混沌分形图的角度出发,在割线法中分别令 $h_k = [f(x_k)]^2$ 及 $h_k = x_k f(x_k)$,得到两个新算法,对应迭代:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[f(x_k)]^3}{f[x_k + f^2(x_k)] - f(x_k)} \quad (7)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k [f(x_k)]^2}{f[x_k + x_k f(x_k)] - f(x_k)} \quad (8)$$

迭代(7)由于在初始估计合理时使得 h_k 变得更

小,对算法起到了一定的加速作用,迭代(8)的性质就要差得多,它对算法起了反加速作用;图 4、5(a)、(b)、(c)为应用这两种方法构造的混沌分形图,与图 1 比较可以看出,迭代(7)在某些范围提高了算法对

初始估计的适应性;迭代(8)使算法对应的每个吸引不动点的吸引域变小,降低了算法对初始估计的适应性。

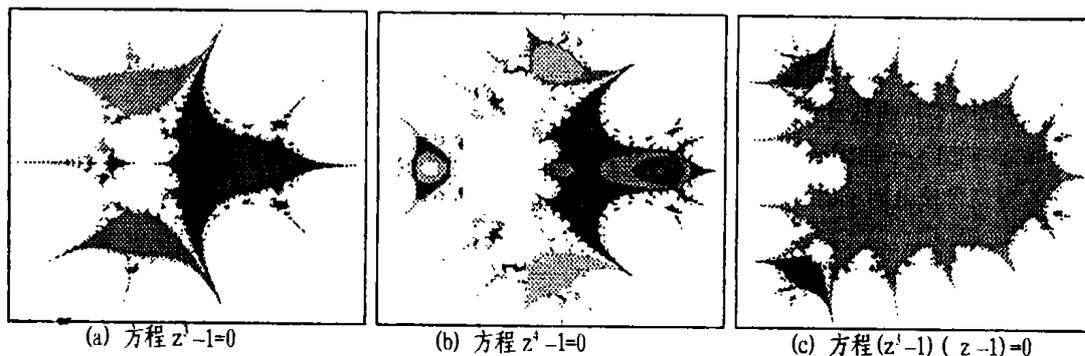


图 4 应用迭代(7)构造的混沌分形图

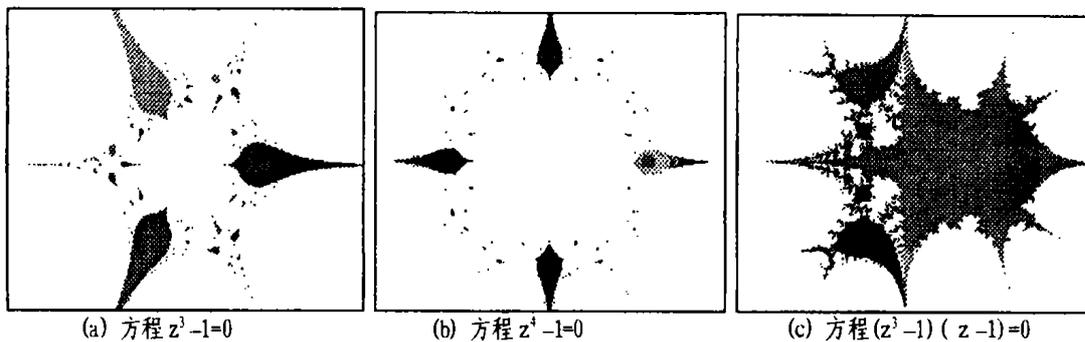


图 5 应用迭代(8)构造的混沌分形图

结论 通过以上计算机实验数学及解析分析,我们得到以下结果:

1. 在割线方法中,预定数列 h_k 可以有很多取法,每一种取法对应了一种新的数值计算方法。这其中,Steffensen 法在初始值估计合理时具有很多标准 Newton 法的优点,但它对初值的依赖关系太强;

2. 为降低 Steffensen 法对初值的强依赖关系,本文提出了几种改进方案,其中以组合 Steffensen 法的效果最好,但这一方法没能完全脱离导数的计算;而带松弛因子的 Steffensen 法在 α 较小时效果也比较好;

3. Steffensen 法为研究求解非线性方程、构造混沌分形图提供了不尽的源泉,我们可以利用计算机实验数学这一工具,决定数列 h_k 的不同取法,来讨论算法及构造混沌分形图。

参 考 文 献

1 Barnsley M F, et al. The Science of Fractal Images.

Springer-Verlag, 1988

2 Walter D J. Computer Art Representing the Behavior of the Newton-Raphson Method. *Comput. & Graphics*, 1993, 17(4): 487~488

3 Gilbert W J. Newton's Method for Multiple Roots. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(2): 227~229

4 Szyzkowicz M. Computer Art Generated by the Method of Secants in the Complex Plane. *Comput. & Graphics*, 1990, 14(5): 509

5 Jones J D. The Method of Secants. *Comput. & Graphics*, 1991, 15(3): 451~454

6 Motyka W A. Chaos and Newton's Method on System. *Comput. & Graphics*, 1990, 14(1): 131~134

7 Levin M. Discontinuous and Alternate Q-system Fractals. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(6): 873~884

8 奥特加 J M, 莱茵博尔特 W C. 多元非线性方程组迭代解法. 北京: 科学出版社, 1983

9 朱伟勇, 等. "M-J 分形图" 科学与艺术的结晶. *科学(中文版)*, 1997(8): 53~59