

# 基于广义遗传算法的全局优化方法<sup>\*</sup>

A Global Optimization Algorithm Based on Generalized Genetic Algorithm

董 聪 郭晓华 袁曾任

(清华大学 北京 100084) (中国科学院模式识别国家重点实验室 北京 100080)

**Abstract** Generalized genetic algorithm is based on some famous modern biologics theories such as the genetic theory by Morgan, the general system theory by Bertalanffy, and etc, so it is superior in biologics to classical one. It is shown in present paper that the global optimization based on generalized genetic algorithm is feasible for large scale engineering.

**Keywords** Generalized genetic algorithm, Global optimization, Large scale engineering

## 1 引言

20 世纪 70 年代前后,作为广义人工智能的一个重要分枝,北美和欧洲的科学家开始探索用模拟生物进化的方式求解复杂优化问题。其中,以 Holland 提出的遗传算法(genetic algorithm, GA)最具代表性<sup>[1]</sup>。90 年代前后,随着智能形成机制研究热潮的再度兴起,具有优良内禀属性的遗传算法的研究和拓展,迅速成为国际学术界和工程界关注的热点<sup>[1~4]</sup>。董聪以 Morgan 的基因理论(1920)及 Eldridge 与 Gould 的间断平衡理论(1972)为依据,在融合了 Mayr 的边缘物种形成理论(1963)和 Bertalanffy 一般系统理论(1973)的基础上,建立了广义遗传算法<sup>[3,4]</sup>。广义遗传算法接弃了经典遗传算法和模拟退火算法等随机优化方法普遍采用的遍历搜索策略,转而采用定向演化模式。在仿真实验中,广义遗传算法成功地再现了 Morgan 发现的基因连锁现象和 Mayr 发现的染色体间的内聚约束力,同时还成功地再现了物种进化过程中的间断平衡现象这一现代古生物学的重大发现,以及中性基因(neutral gene)发生突变的频率大于、甚至远大于功能基因(functional gene)发生突变的频率这一现代分子生物学中令人迷惑的未解之谜<sup>[4]</sup>。

广义遗传算法在生物学方面的优势已充分地显露出来。在数理逻辑方面,本文将证明,广义遗传算法是全局收敛的。同时,将用青马大桥传感器群最优布点设计的成功经验证明,广义遗传算法具有良好的收敛速率,达到了大型工程可实用的程度。

## 2 广义遗传算法的操作程序和操作技巧

在生存选择中,广义遗传算法采用了四(n 点交换时实际为  $2^{n+1}$ ,为论述简洁,以下均称为“四”)分之二择优选择的方式,即在基因交换或基因突变的过程中,允许父辈和子代进行竞争,并让其中的优良者进入下一轮的竞争环境,此举措保证了算法的迭代稳定性,并使其具备了实现局部最优化的功能。在进化程序上,广义遗传算法和经典遗传算法有所不同。经典遗传算法的进化程序为:双亲选择→基因交换→基因突变→生存选择→下一代种群;广义遗传算法的进化程序为:双亲选择→基因交换→一家四口→四分之一生存选择→基因突变→一家四口→四分之一生存选择→下一代种群。也就是说,广义遗传算法将选择原则贯彻于整个生命周期。

从形式上看,广义遗传算法是针对由染色体(变量)顺序连接而成的基因型进行操作,根据表现型(适应性函数)进行取舍的一种迭代运算。在操作环节和进化进程上,广义遗传算法有以下鲜明特征:

1)选择细分为父辈挑选和生存选择两种。父辈挑选采用不放回随机抽样,以确保每个父辈在子代中均有繁衍的机会;生存选择采用允许父辈和子代进行竞争,并让其中的优良者进入下一轮竞争环境的四分之一择优选择方式。两种选择方式的协同作用确保了进化过程的局部稳定性。

2)在进化过程的每一次循环中,交换和突变操作为一必然事件而非或然事件。

3)交换和突变操作发生在染色体上,哪条染色

<sup>\*</sup>国家自然科学基金(59505011,59778039)、国家重点实验室基金、攀登计划重大项目和香港路政署资助课题。

体被选中是一非均匀随机事件,其概率依赖于上一次该染色体发生改变的后果,采用奖优罚劣的策略。

4)以主群的稳定作为进化过程的收敛准则,使算法的收敛性有了明确的判据。

5)将进化过程分为渐进和骤变两个阶段。渐进阶段,主要通过交换和选择的协同作用逼近局部最优状态;骤变阶段,主要通过突变和选择的协同作用实现局部最优状态的定向迁移,使下一次循环可在更好的起点上开始。

6)交换和突变的顺序及方式依赖于种群所处的环境状况。渐进阶段,采用单点或少点交换和突变,交换和突变的顺序为先交换,后突变;骤变阶段,采用多点交换和突变,交换和突变的顺序为先突变,后交换。

7)整个进化过程以渐进方式为主,骤变方式为辅。当进化过程局部收敛时,由反馈环节自动实现渐进方式向骤变方式的转换;同样,一旦群首被更换,则反馈环节自动实现骤变方式向渐进方式的转换。

8)骤变阶段,采用均匀随机交换和突变的方式;渐进阶段,采用反馈型非均匀随机交换和突变的方式,且随着进化进程的展开,非均匀性由反馈环节进行自适应调节。

为便于理解和通过仿真实验加以检验,下面对若干操作技巧做简要的补充说明。

## 2.1 隔离机制的实现

广义遗传算法的一个突出特征就是引入了种群间的隔离机制。Mayr 发现,新物种的形成,首先是隔离机制的建立。在新物种形成的初期,进化过程通常具有更快的速率。广义遗传算法中,所谓新物种的形成过程,就是新局部最优状态的形成过程;隔离机制就是禁止参数空间中相隔较远的群落之间进行交配。隔离机制的作用是保证多局部最优状态的同步形成,也就是确保进化过程的并行化。具体操作程序为:将参数空间剖分成  $N$  个子域,在每个子域内,采用数论中的佳格点集确定初始种群的位置。而后,遗传操作在每个子域内独立同步进行。

## 2.2 良种移植和亚种灭绝

隔离机制的优点是保证了多局部最优状态的同步形成,不足之处在于使各自独立的群落失去了和其它群落中的良种交配繁衍的机会,后一问题可通过良种移植的方式解决。所谓良种移植,就是在进化过程的特定时期,将当时的全局最优个体直接移植到分隔开的每一个子域内的群落中,人工诱发良种杂交。特定时期通常选定为第  $10k$  ( $k=1,2,\dots$ ) 代。如果某个群落中的最优个体长时间不发生变化,且其最优个体原先是由其它群落中移植而来的话,则

让该群落逐步萎缩,直致最终灭绝。从生物学的角度讲,隔离群落的进化结果可能是新生亚种的产生或灭绝,因此,在广义遗传算法中,将这类操作及其结果称之为亚种灭绝。

## 2.3 自适应变焦技术

当优化参数为实型变量时,广义遗传算法可直接操作,此时等位基因为  $0\sim 9$ ;也可映射为二进制代码后再操作,此时等位基因为  $0\sim 1$ 。采用映射而非转换方式将实型变量表示为二进制代码,原因是映射方式可通过表示精度确定相关的基因位长,编码和解码十分方便,同时,还可通过自适应变焦技术在速度和精度之间选择合理的平衡点。变焦技术主要有两种实现方式:一种方式是通过改变基因位长来提高解的表示精度,即在进化初期,选择较短的基因位长,使进化过程加速;在进化后期,选择较长的基因位长,使最优解的表示精度提高。广义遗传算法采用了另外一种更有效的自适应变焦技术,即在稳定的极值点附近进行控制变焦。基本原理是:定义染色体  $x$  的取值范围为  $\nabla x$ ,当前二进制编码长度为  $m$  位, $x$  的表示精度要求为  $10^{-q}$ ,则  $\bar{m} = [\log_2(2\nabla x \cdot 10^q - 2^m + 1) - \log_2(2^m - 1)]$  为变焦后染色体  $x$  的二进制编码长度, $[y]$  表示对  $y$  进位取整。很明显,后一种变焦方式可采用多次变焦策略提高解的表示精度。

## 3 广义遗传算法的收敛特性

求解以下非线性优化问题:

$$\max f(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K \subset R^n \quad (1)$$

其中,  $K$  为紧子集。定义  $S = x_1 x_2 \dots x_n$  为串,  $S$  中的任一固定段为模式 (Schema),  $x_i$  为染色体,  $x_i$  中的固定位为基因,  $f(X)$  为适应值函数。从形式上看,串  $S$  对应于 Morgan 基因理论中的基因型 (genotype), 适应值函数  $f(X)$  对应于表现型 (phenotype), Schema 对应于基因族 (gene cluster) 或基因组 (genome)。采用上述符号,广义 Schema 定理可表示为:

$$m(H, k+1) \geq m(H, k) \frac{\bar{f}(H)}{\bar{f}} \left(1 - P_c(k) \frac{d(H)}{l-1}\right)^{O_c(H)} \left(1 - P_m(k) \frac{d'(H)}{l}\right)^{O_m(H)} \quad (2)$$

其中,  $m(H, k)$ : 第  $k$  代种群中含有给定模式  $H$  的串的总数;  $\bar{f}(H)$ : 种群中含有给定模式  $H$  的串的平均适应值;  $\bar{f}$ : 种群的平均适应值;  $d(H)$ : 模式  $H$  的长度 (模式  $H$  最外侧的两个给定基因间的距离);  $d'(H)$ : 模式  $H$  所包含的基因总数;  $l$ : 串的长度;  $P_c$ : 交换操作概率;  $O_c(H)$ : 交换阶次;  $P_m$ : 突变操作概率;  $O_m(H)$ : 突变阶次。

经典 Schema 定理的表达形式为<sup>[1]</sup>:

$$m(H, k+1) \geq m(H, k) \frac{\bar{f}(H)}{\bar{f}} \left( 1 - P_c(k) \frac{d(H)}{l-1} \right) \cdot (1 - P_m(k))^{O_m(H)} \quad (3)$$

$$\text{或} \quad m(H, k+1) \geq m(H, k) \frac{\bar{f}(H)}{\bar{f}} \left( 1 - P_c(k) \frac{d(H)}{l-1} \right) \cdot (1 - P_m(k) O_m(H)) \quad (4)$$

仅当突变点位于 Schema 域内的基因位时, 突变操作才会破坏给定模式。因此, 经典 Schema 定理对突变操作破坏给定模式的概率描述并不正确。不难看出, 广义 Schema 定理除了纠正经典 Schema 定理中的错误外, 还将其适用范围做了延拓。

Darwin 进化论的核心在于自然选择, 而自然选择的基本素材是生物界普遍存在着的变异(注: Darwin 时代的变异一词, 包括了现代分子生物学意义上的变异和突变 2 个概念)现象。Darwin 认为, 可遗传的变异是实现进化的前提。从形式上看, 广义 Schema 定理没有说明有利的变异在进化过程中如何通过选择进行累积, 变异在其中的作用似乎只是破坏性的, 而不是它本应具有的积极性。另外, 受 Darwin 进化论的影响, 经典遗传算法更强调选择的重要性, 而忽略了突变在进化、特别是在定向进化过程中的积极作用。广义 Schema 定理证明了可通过选择使优良个体的繁衍机会增加, 从而有利于实现局部最优化; 但对交换和突变在确保解空间各点可达性方面的重要作用, 却未能提供任何有利的依据。换句话说, 无论从经典 Darwin 进化论的角度还是从其他更广泛的角度来看, 经典遗传算法在数学结构上均存在缺陷。

与 Holland 以归纳逻辑的方式从 Darwin 的进化论和 Mendel 的遗传因子理论出发建立经典遗传算法的思路不同, 广义遗传算法是通过演绎逻辑的方式建立起来的: 首先建立一个逻辑上合理的算法框架, 然后证明这种框架在数学上是高效的, 最后是检验该算法是否为生物系统所采用。

遗传算法模拟的是生物的自然进化过程, 但自然进化过程本身不存在全局最优化问题。Jacob 认为: 进化就象是个修补匠, 它只能从当时所能得到的材料中, 有选择地进行调整(使生物体适应环境), 其能力受到以前的决定所限制。不仅如此, 每个特定的能力看起来都象一个优美的设计, 但实际上, 它也许不能同更大一些的系统很好地整合在一起, 并且可能同系统的整体布局不相匹配。我们认为, 生物系统的演化从根本上说是动态的, 对于每一个偶然的形态或环境的变化, 生物体皆用已经进化出来的一系列特征去应付生存考验, 在此之前并没有一个经过内省的有意识的筹划。换句话说, 进化的产物都是分

阶段局部优化的结果, 现存的生物只是所有可能生物形式中的一小部分, 并且没有先验的理由假定它们是其中的最优者。因此, 与流行观点不同, 我们认为, 不可能从单纯模仿进化过程发现解决全局优化问题的诀窍。

从数学上讲, 一种算法要想具备实现全局最优化的功能, 它只需满足两个条件: 1) 它具有实现局部最优化的能力; 2) 它具有从一个局部最优状态向下一个更好的局部最优状态定向转移的能力。正是在这样一种思想的指导下, 我们建立了广义遗传算法。

在生存选择中, 广义遗传算法采用了四分之二择优选择的方式, 并借助于以基因型的多点突变操作为主, 以基因交换为辅的策略, 实现从一个局部最优状态向下一个更好的局部最优状态的定向转移。由于采用了局部最优状态的定向转移, 使算法为获得全局最优, 其搜索域不必覆盖整个解空间, 而只需覆盖感兴趣的有限解空间即可。换句话说, 广义遗传算法摒弃了包括经典遗传算法和模拟退火算法等随机优化方法普遍采用的遍历搜索策略, 转而采用定向演化模式。

下文将从数学上对定向演化模式的全局收敛性进行严格的证明。

设  $f(X)$  存在  $m(m \geq 1)$  个取值不同(相同者进行归并)的状态, 并将各状态根据其取值大小按升阶排列:  $f(X_1) < f(X_2) < \dots < f(X_i) < \dots < f(X_j) < \dots < f(X_m)$ 。设系统目前正处在状态  $X$ , 定义:

$$X_i^+ = \{X: f(X) > f(X_i)\} \quad (5)$$

将  $X_i^+$  所包含的状态数定义为  $\Omega_i$ , 则  $\Omega_i$  为  $i$  的单调减函数。

定义  $t_{ij}$  为系统从状态  $X_i$  转移到状态  $X_j$  的概率, 则

$$P(X_i \rightarrow X_i^+) = \sum_{j=i+1}^m P(X_i \rightarrow X_j) = \sum_{j=i+1}^m t_{ij} \geq P(X_i \rightarrow X_j) = t_{ij} \quad (\forall i < j \leq m) \quad (6)$$

其中,  $P(X)$  表示事件(状态)  $X$  发生(出现)的概率。

经典遗传算法实现全局最优功能的前提之一是要要求状态  $X_i$  和状态  $X_j$  之间相通( $X_i \leftrightarrow X_j$ )。从式(6)可以看出, 状态的单向可达性( $X_i \rightarrow X_j, \forall i < j$ )是广义遗传算法实现全局最优的充分条件。进一步, 我们从最大值状态开始, 按单向可达性关系逆向绘制一个树状网络, 可以推知, 只要当前状态位于或可达上述树状网络的任意一个枝杈, 则必可保证广义遗传算法收敛于全局最优状态。解空间的遍历搜索对经典遗传算法实现全局最优功能是必要的, 但对

广义遗传算法则并不必要。事实上,解空间的遍历性是广义遗传算法实现全局最优功能的强充分条件。同样可以看出,选择算子的作用在于保证进化进程的方向性,因此,经典遗传算法将选择算子取为概率算子的做法并无必要。综上所述,与经典遗传算法相比,广义遗传算法实现全局最优化的条件非常宽松。

对于组合优化问题,解空间的状态数是有限的。由于局部极大值点的数目恒少于其状态数,因此,广义遗传算法必可保证在有限步内实现问题的全局最优优化。

#### 4 广义遗传算法的实验验证

我们选择两个比较复杂且具有典型意义的问题验证一下广义遗传算法的全局优化能力。

**例 1**  $\max f(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$  其中,  $-3.0 \leq x_1 \leq 12.1, 4.1 \leq x_2 \leq 5.8$ 。这是一个处处可导的二元函数,存在 500 多个极大值点,目标是找出其全局最优解。

采用随机投点法设定初值,先用目前流行的 Mathematica 计算软件进行求解,结果是:10 组解中的最优解为 37.51062,平均值为 31.54010。然后用广义遗传算法进行求解对比:采用映射方式进行二进制编码,初始基因型的长度为 28 位,前 16 位是染色体  $x_1$ ,后 12 位是染色体  $x_2$ ;种群大小为 24,初始状态均分成 4 个相互隔离的群落,每个亚种的种群大小为 6;进化进程中采用多次变焦策略。在渐进阶段,采取单点交换和突变操作;在突变阶段,采取多点交换和突变操作。如果连续 20 次最优个体不变,则认为结果已经收敛,进化过程终止。问题的全局最优解是 38.85029。从表 1 可以看出,基于广义遗传算法的优化设计是成功的。

表 1 基于广义遗传算法的参数优化设计结果

组号	$x_1$	$x_2$	$f(x_1, x_2)$	进化代数
1	11.62553	5.725137	38.85029	91
2	11.62579	5.725085	38.85029	56
3	11.62553	5.725085	38.85029	127
4	11.62558	5.724982	38.85029	89
5	11.62562	5.725034	38.85029	72
6	11.62555	5.725034	38.85029	62

#### 例 2 青马大桥传感器群最优布点设计

青马大桥是香港的标志性建筑,耗资 72 亿港元,主跨 1377 米,1997 年 7 月建成通车,是目前世界上主跨最长的铁路、公路两用桥。青马大桥横跨青衣岛和马湾岛之间的海峡,设计颤振临界风速为每秒 85 米。在香港这样一个台风多发的地区,为确保其使用安全,设计和安装桥梁健康监测与诊断系统十分必要。健康监测系统是一个实时系统,通常做法是在桥梁的关键部位(如加劲梁的吊点和支点等)布置加速度传感器或应变仪,对这些关键部位的最大加速度或最大应变的变化情况进行实时监测,并根据测得的数据作出快速反应,以避免灾难性事故的发生。健康诊断系统在多数情况下对实时性没有太严的要求,其特点是通过传感器群的优化布置,借助于对采样数据的分析、归纳和推断,对整个结构系统的安全状态和存在的隐患作出比较准确的评价。对健康诊断系统而言,传感器群的优化布置是问题的关键之一。应香港路政署的邀请,清华大学土木工程系于 1997 年 4 月至 5 月对青马桥进行了全桥静动力测试,在此基础上,我们采用广义遗传算法对青马大桥传感器群的最优布点进行了设计,实践证明,基于广义遗传算法的优化设计是成功的,并且广义遗传算法可实现全局最优优化。

**结论** 由上述研究可归纳出以下结论:①广义遗传算法具有实现全局最优化的功能。②广义遗传算法具有良好的收敛速率。③Schema 定理或广义 Schema 定理不构成经典遗传算法或广义遗传算法全局收敛性的数学依据。④为实现全局最优优化,遍历搜索并无必要。⑤基于广义遗传算法的全局优化技术在大型工程上是可以实现的。

#### 参考文献

- 1 Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. MIT Press, 1992
- 2 Bui T N, Moon B R. Genetic Algorithm and Graph Partitioning. IEEE Trans. on Computers, 1996, 45(7):841~855
- 3 董聪. 广义遗传算法. 大自然探索, 1998, 16(1):37~41
- 4 董聪. 广义遗传算法研究进展. 科学, 1998, 50(6)