无向完全图 哈密顿回路 图论 (23)

NP问题

无向完全图的哈密顿回路

Hamilton Circles of No Direction Graph

85-87 O157.5

梁 震 陈新军
（中山大学软件研究所 广州510275）

Abstract In this article, a way of finding all Hamilton cycles of a perfect no direction graph will be presented. Then we can find out the formula of all Hamilton circles of a perfect no direction graph. Finally the way will be expanded to other cases like finding whether a graph has Hamilton cycles or not.

Keywords Hamilton route, Hamilton circle, NP complete problem

一、引言

判断一个图是否有Hamilton回路的充要条件一直没有解决，尽管充分条件与必要条件都有了，而且人们对图的研究已经非常深入——一个例子是竞赛图的研究[4]。在这里我们通过对求无向完全图的哈密顿回路总数的探讨，引申Hamilton回路的求法，另一个引申就是NP完全问题的解法。当然，这里引申出来的方法仍然是完全搜索式的，但在下面对完全图的Hamilton回路的分析中可以看到，里面没有重复的情况。比如两个黑盒子中一个装了一个球，你只能一个个试，才能找到那个球，同样，在求解Hamilton回路中不能确定在哪种情况，必然有或没有Hamilton回路的时候（很多情况下的确如此），只好一个一个地找，找的时候只要不重复，就是好方法。

二、基本概念

图：由点与边构成的集合，其中相关系的两点构成一条边，形式化的定义为：图G=(V,E)是一个系统，其中V是非空有限集合，V中的元素称为结点；E是有限的集合，E中的元素称为边，且E中的元素与V中的一对元素相连系。

无向图：边没有方向性的图。

完全图：若图G中每一对不同的结点间都有有边相连，则称G为完全图。

路、圈：设G=(V,E)为一图，G的有限非空点边交错序列

$$W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$$

称为G的一条从v_0到v_k的途径。对于途径W，若$v_0 <> v_k$则称此途径W是从v_0到v_k的一条路；若$v_0 = v_k$则称途径W是圈。

简单路、简单圈、初级路、初级圈：无重复边的路称为简单路；无重复边的圈称为简单圈；无重复点的路称为初级路；无重复点的圈称为初级圈。

Hamilton图、Hamilton圈：设G=(V,E)为无向图$V=(v_{i1},v_{i2},v_{i3},\cdots,v_{in})$，若V是通过G中各点的初级圈，则称G为Hamilton图。

结点的度：设G=(V,E)是一无向图，以v为端点的边的条数称为v的度，记为deg(v)。

三、对无向完全图的Hamilton圈的讨论

为简单起见，只对无向完全图的Hamilton圈进行讨论，在后面可以看到，该问题引申出来的问题，都可以同样解决。

有关基于小波包变换的图像水印的详细算法在另一文中给出，它们的缺点是计算的复杂性没有得到解决，这也是下一步需要考虑的。

结论 我们在分析已有的图像水印算法基础上，提出了一个频域图像水印算法模型，并对图像水印算法的一些重要特性进行了定量描述，为下一步工作提供了一个框架。在这个模型中，如何定量刻画嵌入水印，检测水印以及攻击都是我们下一步继续深入的工作。

参考文献

1 Hartung, Kutter. Multimedia watermarking techniques. Proceedings of The IEEE, 1999, 87(7): 1079～1107
2 Cox I, et al. Secure spread spectrum watermarking for image, audio and video. In: Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing(ICIP96), 1996
3 Xia X, et al. A multiresolution watermark for digital images. In: ICIP'97, pp548～551
4 Kundur D. Digital Watermarking of Multimedia Signal: Algorithms and Implicactions: [Ph. D. Thesis]. June 1999
5 Houng-Jyh Mike Wang, Po-Chyi Su, C.-C. Jay Kuo. Wavelet-Based Digital Image Watermarking. Optics Express, 1998, 3(12): 491～496

这里的思路是：求一个N个点的无向完全图的Hamilton回路的问题是否可以化为求一个N－1个结点的无向完全图的Hamilton回路的问题？

定理1 一个有H-路（圈）的无向图，它的H-路（圈）所经过的边中的任意两条边不重复。

证：用反证法，若重复，因一条边与两个端点相关联，则至少一个重复端点将出现在一条H-圈上或至少两个重复端点将出现在一个H-路上，这与H-路或H-圈的定义矛盾。

定理2 设G＝(V,E)n(≥3)阶简单图，w是有最小度的顶点，如果deg(w)≥n/2则G是Hamilton图。（文[3]中定理）

根据此定理，我们可以知道，完全图必然有Hamilton圈。

定理3 一个顶点数为N≥3的完全图可以由以下公式计算出它的所有Hamilton圈数(H_n)。$H_n=[P_{(N-1)}^{(N-1)}]/2=[(N-1)!]/2; n\geq 3$

证法一（利用排列组合知识证明）。在N＝3时，只有一条哈密顿回路，恰好是[(2－1)!]/2条。N＞3时，设点的集合为$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_N$；哈密顿回路的样子是：

$A_1,B_1,B_2,\cdots,B_{(N-1)}A_1$

$B_j\in\{A_k|A_k\neq A_1\}, B_j\neq B_m(m\neq j)$

对于一个圈，任何一点都可以看成是开头(A_1)。我们可以设所有的哈密顿回路都以A_1开头，即所有的哈密顿回路都是形如

$A_1,B_1,B_2,\cdots,B_{(N-1)}A_1$

$B_j\in\{A_k|A_k\neq A_1\}, B_j\neq B_m(m\neq j)$

那剩余的N－1个点有多少种排列组合？(N－1)!种。$A_1,B_1,B_2,\cdots,B_{(N-1)}A_1$式中，从左边数过去与从右边数过去，如果是相同的，则它们是同一个圈，如果不相同，则是不同的圈。所以N≥3的完全图有[(N－1)!]/2条哈密顿圈。

证法二 （利用加点的方式证明）。在N＝3时，只有一条哈密顿回路，恰好是[(2－1)!]/2条。N＞3时，由于是在N－1的完全图上加入一个点，设N－1的完全图上有[(N－1)!]/2个不同的哈密顿圈，则对于任何一个已有的N－1的完全图上的圈新加入的点可以插入在该圈的不同边上构成一个新的哈密顿圈。（如图1）。

这种插法一共有C_{n-1}^1种，对于不同的圈，显然插入新点后不会有重复的情况。而且由于N个点的完全图中的哈密顿回路将任一点去掉，构成的回路在N-1个点的完全图中必然是哈密顿回路。所以这种方法覆盖了所有的哈密顿圈。所以N个点的完全图一共有$\{[P_{n-2}^{(n-2)}]/2\}*C_{n-1}^1=[P_{n-1}^{(n-1)}]/2$个哈密顿圈。

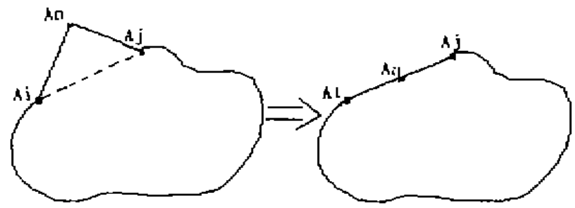

图1 A_i与A_j是原N－1完全图中的一条哈密顿回路中的两相邻点，A_n是新加入的点。由于是完全图，A_n与A_i，A_j都有邻边，将A_i与A_j的连线去掉，加入A_iA_n、A_jA_n两条边则新的圈是N完全图的一个哈密顿回路，该图就相当于把A_n插入到已有的哈密顿回路中

以上两个证明方法都很难引申到搜索图的哈密顿回路的问题，因为它们是与搜索无关的，下面我们再介绍一种与搜索有关的证明方法，并且我们将把它引申到找Hamilton回路之类的问题上去。

证法三（用归纳法证）。N＝3时，H_n＝1这一眼就可以看出，N＝4时，让我们看图1，此时完全图不过是在N＝3的完全图(V_2,V_3,V_4)上加一个项点V_1，然后将V_1与完全图(V_2,V_3,V_4)中的所有点用一条边连起来构成。

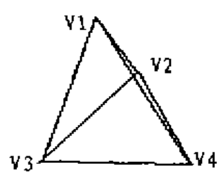

图1

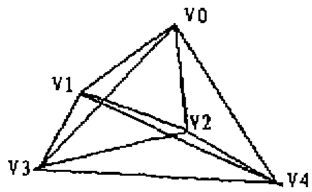

图2

根据Hamilton回路的定义，该完全图的每一Hamilton路必然经过V_1。与V_1相关联的边共有三条，所以，任一Hamilton回路，必然经过其中的两条。从三条边中选两条的方法有C_3^2种，即$C_3^2=(P_3^2)/2$种。

那么我们选出其中两条边(V_1,V_2)与(V_1,V_3)作讨论：经过该两条边的Hamilton回路必然不经过(V_2,V_3)这条边。值得注意的是：经过(V_1,V_2)与(V_1,V_3)的Hamilton回路在除去V_1的子图中是一条以V_2为端点的以V_3为另一端点的Hamilton路，该路加上(V_2,V_3)这条边，就是除去V_1的完全子图中的经过(V_2,V_3)的Hamilton圈。N＝3的完全图有多少条这样的圈，N＝4的完全图就有多少与C_3^2的积个Hamilton圈。

这样，我们就将求一个4个端点的完全图的问题与

该图的3个端点的完全子图的 Hamilton 圈的问题联系起来了。

完全图(V_2、V_1,V_4)中经过(V_2,V_1)这条边的 Hamilton 回路显然只有一条。

我们这里考虑了 $n=4$ 的完全图的所有 Hamilton 回路并把它们划分为分别经过(V_2,V_1,V_3)、(V_3,V_1,V_4)、(V_2,V_1,V_4)的三种情况。显然分别处于这三种情况中的各 Hamilton 圈的集合是不相交的,也就是说不可能存在 Hamilton 圈,它经过 V_1 两次。另外,该方法穷尽了所有的解,(只要是该图的 Hamilton 回路,它必然经过(V_2,V_1,V_3)、(V_3,V_1,V_4)、(V_2,V_1,V_4)中的一*条路,并且根据完全图的对称性,经过每条路的情况是*可以同样考虑的。所以,$N=4$ 的完全图有 $C_3^2 * 1 = C_3^2$ 条 Hamilton 圈。

同理,以下证明可以采用与上面同样的方法。设 $N=n-1$ 时的完全图满足以上公式,则对于 $N=n$ 的情况.

将其中一点设为 V_0 提取出来考虑。完全图的所有 Hamilton 回路必然经过 V_0,与 V_0 相关联的边有 $n-1$ 条;

第一步:从这些边中选出两条,作为所有经过该两边的 Hamilton 回路的一个划分,将 V_0 点除去得到的完全子图中,必然有一条边设为(V_i,V_j)与这两条边构成三角形,将这条边找到,那么下一步的任务是找 $n-1$ 个顶点构成的完全子图中经过该边的所有 Hamilton 回路的条数。注意,此时不用考虑经过别的边的 Hamilton 回路是否会与经过此边的 Hamilton 回路重复,因为第一步已经将所有 Hamilton 回路划分。

(以下将在 $n-1$ 个结点构成的完全子图中考虑,V_0 点被剔除出去了)。

第二步:从 V_i,V_j 两端点中选出一个作为进一步划分 Hamilton 回路的顶点。从与 V_i 相关联的边中(不包括(V_i,V_j))选出一条设为(V_i,V_k),与(V_i,V_j)构成一条路,在 $n-1$ 个结点构成的完全图中经过(V_i,V_j)的所有 Hamilton 回路显然都必然不重复地考虑了。

将 V_i 点除去得到的 $n-2$ 完全子图中,必然有一条边(V_k,V_j)与这两条边构成三角形,那么下一步的任务是找 $n-2$ 个顶点构成的完全子图中经过(V_k,V_j)的所有 Hamilton 回路的条数。

以此类推,直到完全子图的顶点数=3

第一步有 $C^2_{(n-1)}$ 种选法,第二步有 $C^1_{(n-3)}$ 种选法,第三步有 $C^1_{(n-4)}$ 种选法……倒数第一步有 C^1_2 种选法。

所以,$N(N>4)$ 个结点构成的完全图有:

$$C^2_{N-1} C^1_{(N-3)} * \cdots\cdots * C^1_2 = [P_{(N-1)}^{(N-1)}]/2 = [(N-1)!]/2$$

个不同的 Hamilton 圈。定理得证。

引申:由以上的第三个证明中我们可以看到,该证明过程其实就是找 Hamilton 回路的过程,过程中每一步都是确定的,不存在试探的情况,所以找一个完全图的所有 Hamilton 回路的时间复杂度将是 $O(n!)$——实际上是($N>4$),对于加权的完全图,寻找它所有的 Hamilton 圈中的最短圈的问题(货郎担问题)将显然可以在同样的时间复杂度上解决。而对于一个非完全*的 Hamilton 回路,找它的所有 Hamilton 回路显然可*以用同样的做法,并且由于所有图必然是完全图的子集,求任意一图的 Hamilton 所有回路时间复杂度必然在该复杂度以下。判断一个图是否有 Hamilton 回路的方法自然也可以同样处理,达到同样的复杂度。并且,对于非完全图,只要在执行上面第一步的时候选度数最低的点考虑,以后每一步选两个端点中度数较低的一个作为划分端点,将使时间复杂度达到较小——仍无法保证最小。

参 考 文 献

1 [美]M. R. 加里 D. S. 约翰逊. 计算机和难解性(NP 完全问题导引) 1979

2 离散数学(教材). 西安交通大学出版社,1991

3 王朝瑞 图论(第二版) 北京理工大学,1997

4 Gutine G, Yeso A. Hamiltonian Paths and Cycles in Hypertournament

5 Langleg L, et al the p-Competition Graphs of Strongly Connected and Hamiltonian Digraphs

6 Bang-Jensen J, Gutin G. On the Complexity of Hamiltnian *Path and Cycle Problems in Certain Classes of Digraphs*. Oct. 1997

7 Frieze C C A. Hamilton Cycles in Random Graphs and Directed Graphs. June 1997

8 Savage C D. Generating Permutatins with K-Differences *May 1989*

9 Victoria F R, et al. Hamilton Cycles which Extend Transposition Matchings in Cayley Graphs

10 Gutin G, Yeo A. Quasi-hamiltonicity: a series of necessary conditions for a digraph to be hamiltonian. 1998

11 Bang-Jensen J, Gutin G On the Complexity of Hamiltonian Path and Cycle Problems in Certain Classes of Digraphs. 1997