

模糊蕴含运算

模糊推理

模糊蕴含论

76-78

76-78

模糊蕴含运算和模糊推理研究^{*}

On the Relation between Fuzzy Implication and Reasoning Operators

陈丹 何华灿[✓] 王晖

TP18

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)

Abstract In fuzzy reasoning, two important questions should be solved: one is implication operator, the other is reasoning operator. In a lot of literature, the two operators are separately considered. In this paper we present that there exists an inverse relation between the two operators, and point out fuzzy reasoning with inverse operators is a relation reappearing algorithm, and extend the fuzzy reasoning operation by presenting that T-norm is a special case of reasoning operator.

Keywords Fuzzy implication operator, Fuzzy reasoning operator, Inverse operation, Relation reappearing algorithm

1 引言

模糊推理是一种利用模糊集合论研究不确定性问题方法。实际上多输入多输出系统的推理问题的关键是单输入单输出系统的模糊推理问题,因此本文只考虑单输入单输出系统的模糊推理问题。模糊推理中涉及到两个主要的问题:一是模糊蕴含算子的选择,二是推理合成方式的选择。模糊蕴含算子将规则转换成一种二元关系,模糊推理算子则是利用二元关系和已知的前提推出结论。蕴含算子的种类繁多,有大量的文献研究了蕴含算子的选取,并比较不同蕴含算子的性能^[1]。推理合成通常采用 supT 方法,即采用 T 范数作为推理算子。例如,在模糊控制中通常采用的 Mamdani 方法就是利用取小运算作为蕴含算子和推理算子而得到的,虽然文献中对推理合成方法进行了研究,如 3I 算法^[2],但未研究过推理算子。本文提出的推理算子是比 T 范数范围更广泛的 R 算子,因此推理合成方法应为 supR。另外研究了蕴含算子和推理算子的关系,指出了蕴含算子 I 与推理算子 R 之间存在互逆的关系。

2 模糊蕴含算子和模糊推理算子的互逆关系

定义1 如果二元算子 $I(a, b): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足以下条件:

I-1 $I(1, a) = a; a \neq 0, I(a, 0) = 0;$

I-2 $I(a, b)$ 是关于 a 的单调减函数,关于 b 的增

函数;

I-3 $I(a, I(b, c)) = I(I(a, b), c);$

I-4 如果 $a \leq b$, 则 $I(a, b) = 1$

则称 $I(a, b)$ 是模糊蕴含算子 (Implication operator) 或 I 算子,记作 aIb 。

定义2 如果二元算子 $R(a, b): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足以下条件:

R-1 $R(1, a) = a;$

R-2 $R(a, b)$ 是关于 a, b 的单调增函数;

R-3 $R(a, R(b, c)) = R(b, R(a, c));$

R-4 如果 $a, b > 0$, 则 $R(a, b) > 0;$

R-5 $R(a, b) \leq \min(a, b)$

则称 $R(a, b)$ 是模糊推理算子 (Reasoning operator) 或 R 算子,记作 aRb 。

定理1 如果 $R(a, b)$ 是模糊推理算子,则对于任意的 $a, b, c \in [0, 1]$, 存在一个唯一的蕴含算子 R^* 满足:

$$aRb \leq c \Leftrightarrow aR^*c \geq b \quad (1)$$

其中 $aR^*c = \sup\{x | aRx \leq c\}$

证明: ①: 证明 R^* 是蕴含算子, 即 R^* 满足 I-1 ~ I-4, 由推理算子定义 R-1, R-2, 可以很容易地得到 R^* 满足 I-1, I-2; 以下证明 R^* 满足 I-3, I-4, 由已知可得:

$$aR(aR^*c) = aR \sup\{x | aRx \leq c\} \leq c \quad (2)$$

$$aR^*(aRb) = \sup\{x | aRx \leq aRb\} \leq b$$

1) 当 $a \leq b$, 对于 $aRx \leq b$ 可得: $aRx \leq \min(a, x) \leq a \leq b$ 所以 x 可取任意值, $\sup x = 1$; 即: 当 $a \leq b, R^*(a,$

* 本课题得到国家教委博士学科点专项科研基金(96069923)和陕西省自然科学基金(98X15)的资助。

$b)=1$, 因此 R^* 满足 I-3.

2) 欲证 R^* 满足 I-4, 即: $aR^*(bR^*c) = bR^*(aR^*c)$, 因为: $aR^*(bR^*c) = \sup\{x | aRx \leq bR^*c\}$; $bR^*(aR^*c) = \sup\{x | bRx \leq aR^*c\}$.

利用 (2), $aRx \geq bR^*c$ 等价于 $bR(aRx) \leq bR(bR^*c) \leq c$, $bRx \leq aR^*c$ 等价于 $aR(bRx) \leq aR(aR^*c) \leq c$. 利用 R-4, $aR(bRx) = bR(aRx)$, 故 $R^*(a, R^*(b, c)) = R^*(b, R^*(a, c))$, 因此 R^* 满足 I-4.

② 证明唯一性. 假设存在一个算子 R_1^* 满足 (1), 利用 (2) 得: 对于任意 $a, c \in [0, 1]$, 有 $aR_1^*(aR_1^*c) \leq c$, 因此 $aR_1^*c \geq aR^*c$; 同理可得到: $aR(aR^*c) \leq c$, 因此 $aR_1^*c \leq aR^*c$. 所以得证: $aR_1^*c = aR^*c$. 因此 R^* 是唯一的.

定理2 如果 $I(a, b)$ 是蕴涵运算, 则对于任意的 $a, b, c \in [0, 1]$, 存在一个唯一的模糊推理算子 I^* 满足:

$$aIb \leq c \Leftrightarrow aI^*c \geq b$$

其中 $aI^*c = \inf\{x | aIx \geq c\}$

证明: 与定理1类似.

由上可见, 所有满足 I-1~I-4 的算子与所有满足 R-1~R-5 的算子是一一对应的, 且它们是互逆的, 常用的模糊蕴涵算子及其逆算子在表1中给出.

表1 互逆的 R 算子及 I 算子

序号	蕴涵运算 I	推理运算 R
0	$\min(1, b/a)$	ab
1	$\begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$	$\min(a, b)$
2	$\min(b-a+1, 1)$	$\min(a+b-1, 0)$
3	$\min(1, b/a^2)$	a^2b
4	$\begin{cases} 1 - \frac{a-b}{a+b-ab} & a \geq b \\ 1 & a < b \end{cases}$	$\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$

3 互逆的 R, I 算子对与关系再现算法

定理3 T 范数是 R 算子.

证明略。(由 T 范数的定义可以直接得出). T 范数其实是满足交换律的 R 算子.

例如, a^2b 是 R 算子, 但却不是 T 范数.

考虑最简单也是最基础的 FMP 模型.

已知: 如果 A, 则 B

给定: A'

求: B'

A, A' 是论域 X 上的模糊集, B, B' 是论域 Y 上的模糊集. 传统的模糊推理结果为:

$$B'(y) = \sup\{x | T(A'(x), I(A(x), B(y)))\}.$$

我们将模糊推理中 T 范数扩展为 R 算子:

$B'(y) = \sup\{x | R(A'(x), I(A(x), B(y)))\}$ 给出不同的 R 算子或 I 算子, 就得到模糊推理的一种新算法.

定理4 采用互逆的 R 算子和 I 算子的推理算法是关系再现算法.

证明: 当 $A' = A$, 即 $A'(x) = A(x)$, 由 (2) 可得: $aR(aR^*c) \leq c$, 即 $R(A'(x), I(A(x), B(y))) \leq B(y)$, 所以 $B'(y) = \sup\{x | R(A'(x), I(A(x), B(y)))\} = B(y)$, 从而得到 $B' = B$.

若选择互逆的蕴涵算子和推理算子, 则利用 $\sup R$ 方法一定可以保证该算法是关系再现算法, 而对于非互逆的算子对则不一定是关系再现算法. 给出模糊集 A, B, A' 的隶属函数如图1所示, 利用表1给出的五对算子进行25种模糊推理运算, 其结果如图2. (图1、图2中横坐标表示论域, 为便于描述, A 与 B 采用了相同的论域, 纵坐标表示隶属函数的值域.)

不难看出有一部分推理结果不等于图1中的 $B(y)$, 即不满足关系再现算法. 表2中列出了在25对算子中满足关系再现算法的算子对. 它们与 $A(x)$ 和 $A'(x)$ 采用什么形式的隶属函数无关, 只要满足 $A(x) = A'(x)$ 就能得到 $B(y)$. 为简单起见, 使用了表1中的序号代表各算子.

表2 满足关系再现算法的算子对(以 R 为参照)

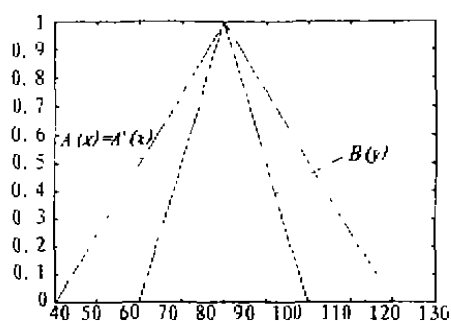
R	0	1	2	3	4
1	0, 1	1	0, 1, 2, 4	0, 3, 4	0, 1, 4

表3 满足关系再现算法的算子对(以 I 为参照)

I	0	1	2	3	4
R	0, 2, 3, 4	0, 1, 2, 4	2	3	2, 3, 4

表2、3验证了定理3, 即: 互逆的算子对总是满足关系再现算法, 且说明了采用互逆算子的模糊推理算法并不是其成为关系再现算法的必要条件. 另外也可从表中看出, 推理算子 $R_1 = \min(a, b)$ 较“冷淡”, 在所讨论的蕴涵算子中仅与自己的逆算子构成的模糊推理满足关系再现算法, 而其逆算子 $I_1 = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$ 却较为“活跃”, 这也体现出互逆的一面.

在选择推理算子或蕴涵算子时, 应注意选择合适的算子. 由于不同的系统有不同的需求, 因此一个在某一方面适用的算子并不一定就适用于其它系统, 但就算子的选择而言, 应优先考虑互逆算子对构成模糊推理方式.

图1 模糊集 $B, A' = A$ 的隶属函数

结束语 本文证明了模糊推理算子与蕴涵算子间的互逆关系,对原有的模糊推理方式进行了扩展,并证明了使用互逆算子对进行模糊推理是一种关系再现算法。这使得在对蕴涵算子的研究中应结合推理算子进行研究。

参考文献

- 1 Cheng LiChun, Boxing Peng. The Fuzzy Relation Equation With Union Or Intersection Persevering Operator. Fuzzy

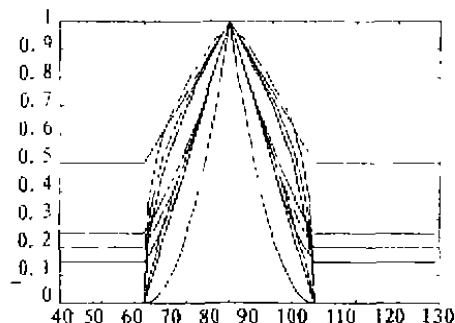


图2 采用不同算子的模糊推理结果

Sets and System, 1988, 25: 191~204

- 2 张文修, 梁广锡. 模糊控制与系统. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- 3 刘永怀. 基于广义范数的不确定性推理研究. [博士学位论文]. 西北工业大学, 1996
- 4 Mizumoto M, Zimmermann H. Comparison of Fuzzy Reasoning Method. Fuzzy Sets and System, 1982, 8: 253~283
- 5 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法. 中国科学(E辑), 1999, 29(1): 43~53

(上接第62页)

- 16 Sakurai A. Tighter Bounds on the VC-Dimension of Three-Layer Networks. In: Proc. of the World Congress on Neural Networks. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1993: 540~543
- 17 Carter M A, Oxley M E. Evaluating the Vapnik-Chervonenkis Dimension of Artificial Neural Networks Using the Poincare Polynomial. Neural Networks, 1999, 12(3): 403~408
- 18 Zaslavsky T. Facing up to Arrangements, Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes. Memoirs of American Mathematical Society, 1997, 154: 1~95
- 19 Orlik P, Teraso H. Arrangements of Hyperplanes. New York: Springer-Verlag, 1991
- 20 Koiran P, Sontag E D. Vapnik-Chervonenkis Dimension of Recurrent Neural Networks. Discrete Applied Mathematics, 1998, 86: 63~79
- 21 Goldberg P W, Jerrum M R. Bounding the VC Dimension of Concept Classes Parameterized by Real Numbers. Machine Learning, 1995, 18: 131~148
- 22 Koiran P, Sontag E D. Neural Networks with Quadratic VC Dimension. Journal of Computer and System Sciences, 1997, 54: 190~198
- 23 Bartlett P L, Maiorov V, Meir R. Almost Linear VC-Dimension Bounds for Piecewise Polynomial Networks. Neural Computation, 1998, 10(8): 2159~2173
- 24 Karpinski M, Macintyre A. Polynomial Bounds for VC Dimension of Sigmoidal and General Pfaffian Neural Networks. J. of Computer and System Sciences, 1997, 54: 169~176
- 25 Maass W. Perspectives of Current Research about the Complexity of Learning on Neural Nets. In: Roychowdhury V, Su K Y, Orlitsky A, eds. Theoretical Advances in Neural Computation and Learning. North-Holland: Kluwer Academic Publishers, 1994: 395~336
- 26 Perrone M, Cooper L. When Networks Disagree: Ensemble Method for Neural Networks. In: Mammone R, ed. Artificial Neural Networks for Speech and Vision. Chapman and Hall, 1994
- 27 Krogh A, Vedelsby J. Neural Network Ensembles, Cross Validation, And Active Learning. In: Tesauro G, Touretzky D, Leen T, eds. Advances in Neural Information Processing Systems (Volume 7). Cambridge, MA: MIT Press, 1995: 231~238
- 28 Haussler D, et al. Estimating Average-Case Learning Curves using Bayesian, Statistical Physics and VC Dimension Methods. In: Moody J, Hanson S, Lippmann R, eds. Advances in Neural Information Processing Systems (Volume 4). Denver, CO: Morgan Kaufmann, 1992: 78~150
- 29 Gu H, Takahashi H. Toward More Practical Average Bounds on Supervised Learning. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996, 7(4): 953~968
- 30 Takahashi H, Gu H. A Tight Bound on Concept Learning. IEEE Transactions on Neural Networks, 1998, 9(6): 1191~1201