

图形处理

双曲线逼近

三次平面曲线

30

计算机科学2000Vol. 27No. 8

迭代算法

双曲线偶逼近三次平面曲线的迭代算法^{*}

An Iterating Algorithm on the Bi-hyperbola Approximation of Cubic Curves

王文德 杜玉越

TP391.41

(聊城师范学院计算机科学系 聊城252059)

Abstract An iterating algorithm on the bi-hyperbola approximation of cubic curves is given in this paper. It aims at the smoothness of the resulting curve. The precision is higher and the speed is faster than that with arcs approximation. It can save half drawing information for a given precision.

Keywords Graphics, Bi-hyperbola, Cubic curves, Approximation, Iterating

1 引言

在进行图形处理时,经常用到各种不同的三次平面曲线,如 Bezier 曲线, B 样条曲线等,而由于计算机软件及图形输出设备不同,它们所支持的曲线类型也不相同,因此,实际绘制图形时,通常用一种类型的曲线逼近另一种类型的曲线,如用双圆弧逼近三次平面曲线的方法^[1,2],已得到广泛应用并取得良好效果,但用双圆弧逼近三次平面曲线,在两节点间仅有5个交点,其逼近曲线也不够光滑。文[3]提出了双曲线偶逼近三次平面 B 样条曲线的算法,本文进一步研究三次平面的双曲线偶逼近,提出一种用双曲线偶逼近三次平面 Bezier 曲线的迭代算法,其逼近曲线与 Bezier 曲线,在两节点间达8个交点,逼近精度高,且对同样的误差限,用双曲线偶逼近比用双圆弧逼近收敛速度快。若将本算法应用到配备有双曲线插补装置的数控绘图机上,在同样的精度下,可节省一半的绘图信息^[4]。

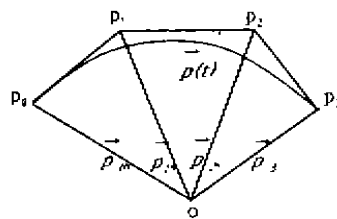
2 有关结论

对平面内任意两点 a、b,用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 分别表示点 a 和点 b 的位置矢量, $\overrightarrow{ab}$ 表示具有从点 a 到点 b 方向的线段,其长度为两点间的欧几里德距离。

三次平面 Bezier 曲线 $\vec{p}(t)$, 由4个位置矢量 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ 和 $\vec{p}_3$ 确定^[5], 如图1所示。 $\vec{p}(t)$ 的矢量方程可由下式表示:

$$\vec{p}(t) = [t^3, t^2, t, 1]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_0 \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \end{bmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

图1 三次 bezier 曲线 $\vec{p}(t)$

由文[5]知,三次平面 Bezier 曲线 $\vec{p}(t)$ 的主要性质有:

$$(1) \vec{p}(0) = \vec{p}_0, \vec{p}(1) = \vec{p}_3$$

$$(2) \vec{p}'(0) = 3\vec{p}_0\vec{p}_1, \vec{p}'(1) = 3\vec{p}_2\vec{p}_3$$

$$(3) \vec{p}''(0) = 6(\vec{p}_1\vec{p}_2 - \vec{p}_0\vec{p}_1),$$

$$\vec{p}''(1) = 6(\vec{p}_2\vec{p}_3 - \vec{p}_1\vec{p}_2)$$

(4) 任给 $t_0 \in (0, 1)$, 则可导出另外两组位置矢量, 使得第一组位置矢量所确定的 Bezier 曲线等于曲线段 $\{\vec{p}(t), t \in [0, t_0]\}$; 而第二组位置矢量所确定的 Bezier 曲线等于曲线段 $\{\vec{p}(t), t \in [t_0, 1]\}$, 通常称这条性质为 Bezier 曲线的可分割性。

由文[2]知, 对 Bezier 曲线, $\vec{p}(t) = (x(t), y(t)) (0 \leq t \leq 1)$, 若方程

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2)$$

有解, 则其解即为 $\vec{p}(t)$ 的拐点。

若 Bezier 曲线 $\vec{p}(t)$ 存在拐点, 我们在拐点处将 $\vec{p}(t)$ 分成两段, 然后分别由(2)式检查每一段是否还存在拐点, 直至被分的每一段不含拐点, 再对每段实行双曲线偶逼近, 因此, 在本节的讨论中, 我们不妨总假定

^{*} 本文系山东省自然科学基金资助课题。

$\bar{p}''(t) (0 \leq t \leq 1)$ 取定后, 此时 $\bar{p}''(0)\bar{p}''(1) \geq 0$.

对 $\forall t_0 \in (0, 1)$, 可求得 $\bar{p}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, $\bar{p}'(t_0)$ 及 $\bar{p}''(t_0)$.

应用 J. Steiner 定义二次曲线射影的方法可得到两簇二次曲线偶:

$$L_1: [(y(t) - y(t_0))(x(0) - x(t_0)) - (x(t) - x(t_0))(y(0) - y(t_0))]^2 \\ = c_1 [(y(t) - y(0)) - y'(0)(x(t) - x(0))] \\ [(y(t) - y(t_0)) - y'(t_0)(x(t) - x(t_0))] \quad (3)$$

$$L_2: [(y(t) - y(t_0))(x(1) - x(t_0)) - (x(t) - x(t_0))(y(1) - y(t_0))]^2 \\ = c_2 [(y(t) - y(1)) - y'(1)(x(t) - x(1))] \\ [(y(t) - y(t_0)) - y'(t_0)(x(t) - x(t_0))] \quad (4)$$

其中, $0 \leq t \leq 1, 0 < t_0 < 1$ c_1, c_2 是可以任意选取的常数.

当 c_1, c_2 被确定后, 二次曲线偶 (L_1, L_2) 便是对 $\bar{p}(t) (0 \leq t \leq 1)$ 的一种逼近. 由 (3) 和 (4) 式知, (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 在 $t=0, t_0, 1$ 处相切, 即存在 6 个交点 (切点也被视为交点). 但由于 c_1, c_2 可任意选取, 则适当选取常数 c_1 和 c_2 , 可使 (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 存在 8 个交点, 但文 [2] 给出的用双圆弧逼近 $\bar{p}(t)$ 的方法仅存在 5 个交点. 因此, 用二次曲线逼近 $\bar{p}(t)$ 的精度高于双圆弧逼近, 即二次曲线偶 (L_1, L_2) 为 $\bar{p}(t)$ 的最佳逼近.

定理 1^[4] 所有逼近 $\bar{p}(t)$ 的二次曲线偶 (L_1, L_2) 中, 在 $t \in [0, 1]$ 中与 $\bar{p}(t)$ 有 8 个交点的是双曲线偶.

定理 1 表明, 只要二次曲线偶 (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 存在 8 个交点, (L_1, L_2) 就是双曲线偶.

定理 2^[4] 当 $\bar{p}''(0)\bar{p}''(1) > 0$ 时, 存在双曲线偶 (L_1, L_2) , 它和 $\bar{p}(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处有公共的切线和曲率, L_1 和 L_2 分别在 $\bar{p}(t)$ 的上方和下方. 这样的双曲线偶还可含有一个任意常数 $t_0 \in (0, 1)$. 如图 2 所示.

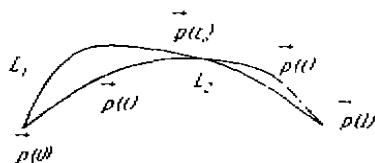


图 2 定理 2 图示

因此, (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 的另外两个交点, 可通过选取 c_1, c_2 使 (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 在 $t=0, 1$ 处的曲率相等来确定. 而且, 若记 y''_{01}, y''_{02} 分别表示 L_1 和 L_2 在 $p(t_0)$ 处的二阶导数值, 还可选取任意常数 t_0 , 使 (L_1, L_2) 在 (t_0) $|y''_{01} - y''_{02}|$ 达到极小, 即 (L_1, L_2) 在 t_0 处接近于二阶光滑. 关于 t_0 的选取有如下定理:

定理 3^[4] 对于满足定理 2 的双曲线偶 (L_1, L_2) , 选

取 t_0 满足:

$$\frac{x(t_0) - x(0)}{x(1) - x(0)} = \frac{\sqrt{(1+\sigma)^2 + 32\sigma} - (5+\sigma)}{4(\sigma-1)} \quad (5)$$

其中 $\sigma = y''(1)/y''(0)$, 则可使 L_1, L_2 在连接点 $\bar{p}(t_0)$ 处 $|y''_{01} - y''_{02}|$ 达到极小.

但是, 当 $\bar{p}''(0)=0$ 或 $\bar{p}''(1)=0$ 时, 定理 3 的条件不再成立. 对这种情况作如下处理: 由文 [4] 知, 此时存在唯一的 $t_0 \in (0, 1)$, 使在 t_0 处 (L_1, L_2) 与 $\bar{p}(t)$ 曲率相等, 即 t_0 为其三重交点, 而在 $t=0, 1$ 处 (L_1, L_2) 的二阶导数值与 $\bar{p}''(0), \bar{p}''(1)$ 之差的绝对值之和达到极小, 此时, t_0 需满足:

当 $\bar{p}''(0)=0$ 时

$$x(t_0) = x(0) + \frac{3\sqrt{2}-2}{4}(x(1) - x(0)) \quad (6)$$

当 $\bar{p}''(1)=0$ 时

$$x(t_0) = x(1) - \frac{3\sqrt{2}-2}{4}(x(1) - x(0)) \quad (7)$$

这样选取的 t_0 , 定理 2 的结论仍成立, 但 (L_1, L_2) 在 $t=0, 1$ 处仅有公共的切线.

定理 4 设 $\bar{p}(t)$ 为三次平面 Bezier 曲线, 则 $\bar{p}''(0)=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_0 p_1}$, 而 $\bar{p}''(1)=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_2}$.

证明: 根据 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 的性质 (3), 定理结论显然成立.

下面估计双曲线偶 (L_1, L_2) 与原 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 之间的最大误差. 设 (L_1, L_2) 的连接点为 $t=t_0 (t_0 \in (0, 1))$ 即 $\bar{p}(t_0)$ 处, 由定理 2 及图 2, 则有:

(1) 当 $0 \leq t \leq t_0$ 时, $\bar{p}(t)$ 与 L_1 的最大误差为

$$\max_{t \in [0, t_0]} (L_1 - \bar{p}(t))$$

(2) 当 $t_0 \leq t \leq 1$ 时, $\bar{p}(t)$ 与 L_2 的最大误差为

$$\max_{t \in [t_0, 1]} (\bar{p}(t) - L_2)$$

若记 $\Psi_1(t) = L_1 - \bar{p}(t)$, $\Psi_2(t) = \bar{p}(t) - L_2$, 则 $\Psi_1(t)$ 和 $\Psi_2(t)$ 均为 t 的三次实多项式. 若用 Z_1 表示 $\Psi_1(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上的全体零点的集合, Z_2 表示 $\Psi_2(t)$ 在 $(t_0, 1)$ 上的全体零点的集合, 则

$$\max_{t \in [0, t_0]} \Psi_1(t) = \max_{t \in Z_1} \Psi_1(t)$$

$$\max_{t \in [t_0, 1]} \Psi_2(t) = \max_{t \in Z_2} \Psi_2(t)$$

因此, (L_1, L_2) 逼近 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 的最大误差为

$$\max_{i=1,2} \{ \max_{t \in Z_i} \Psi_i(t) \}$$

而对于 $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$ 的零点, 仅需计算一般二次实多项式的根即可得到.

3 算法描述

现在给出曲线偶 (L_1, L_2) 逼近三次平面 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 的算法如下:

(1) 判断 $\bar{p}(t)$ 的位置矢量顶点 p_0, p_1, p_2, p_3 是否共线, 若共线则用直线段对其进行逼近; 否则进入第(2)步。

(2) 由(2)式判断 $\bar{p}(t)$ 是否存在拐点, 若存在则将拐点作为分割点 t_0 , 转第(6)步; 否则进入(3)步。

(3) 若 $\overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_0 p_1}$ 即 $\bar{p}''(0) = 0$, 则由(6)式计算 t_0 ; 若 $\overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_2}$ 即 $\bar{p}''(1) = 0$, 则由(7)式计算 t_0 ; 若 $\bar{p}''(0) \bar{p}''(1) > 0$, 则由(5)式计算 t_0 。然后将 t_0 作为分割点, 进入第(4)步。

(4) 由(3)和(4)式计算 (L_1, L_2) , 进入第(5)步。

(5) 对给定的误差限 $\epsilon > 0$, 若 $\max_{t \in [0,1]} \{\max_{i=1,2} |\Psi_i(t)|\} \leq \epsilon$ 成立, 则转第(7)步; 否则进入第(6)步。

(6) 将 Bezier 曲线从分割点 t_0 处分为两段, 并对每

段重复(2)至(6)步。

(7) 若还有尚未处理的 Bezier 曲线重复第(1)至(7)步; 否则进入第(8)步。

(8) 算法结束。

结论 本文所给算法, 我们已用 Visual C 语言在 D-XY 绘图机上实现, 用双曲线偶 (L_1, L_2) 逼近后生成的曲线与原 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 基本完全重合, 并且与文[2]中算法相比较, 精度高、速度快。若将该算法用于配有双曲线插补装置的数控绘图机, 其效果会更好。

参考文献

- 1 Bolton K M. B-splines. CAD, 1975(2): 89~94
- 2 常金玲, 张林波. 一种用圆弧逼近三次平面 Bezier 曲线的算法. 计算机学报, 1993, 16(10): 76~78
- 3 杜玉越. 一种用双曲线偶逼近三次平面 B 样条曲线的算法. 计算机工程, 1995, 21(1): 36~38
- 4 苏步青, 华宣积. 双圆环逼近的推广. 复旦学报, 1979, 18(4): 1~9
- 5 苏步青, 刘鼎元. 计算几何. 上海科学技术出版社, 1981

(上接第86页)

$$T_{100} = p^3 t^2,$$

$$T_{110} = \frac{p^3 t^3 - p^4 t^4}{1 - 2pt + p^2 t^2}$$

相应的获胜概率分别为:

$$P_{01} = T_{01} |_{t=1, p=1/2} = 5/8$$

$$P_{100} = T_{100} |_{t=1, p=1/2} = 1/8$$

$$P_{110} = T_{110} |_{t=1, p=1/2} = 2/8$$

平均仲裁长度

$$L = \frac{d(T_{01} + T_{100} + T_{110})}{dt} |_{t=1, p=1/2} = 3.25.$$

计算机模拟结果: 对 10000 个 0,1 随机序列 01, 100, 110 获胜次数分别为 1922, 380, 755 次。可见 $P_{01} : P_{100} : P_{110} \approx 5 : 1 : 2$ 。平均仲裁长度 $L = 10000 \div (1922 + 380 + 755) \approx 3.27$, 与理论计算相符。

若取模式为 010, 011, 110, 111 则获胜概率分别为 3/8, 3/8, 1/8, 1/8, 平均仲裁长度为 4。若取模式为 010, 011, 110, 100 则获胜概率分别为 5/16, 5/16, 4/16, 2/16, 平均仲裁长度为 3.875。若取模式为 010, 011, 100, 101, 则获胜概率各为 1/4, 平均仲裁长度为 4。均与模拟结果吻合。

又例, 6 个设备的识别码分别取为 01001, 01010, 01110, 01111, 11010, 11110, 计算机模拟结果表示各模式单独在 10000 个 0,1 随机序列中出现次数分别为 279,

234, 307, 310, 319, 328。但在相互竞争状态下, 它们的获胜次数分别为 171, 153, 236, 247, 182, 49。出乎意料的是 11110 模式在单独统计中出现次数较高, 但在竞争中却处于劣势。

小结 获胜状态转移图能很好描述随机争用仲裁方式中各指定识别码模式在 0,1 随机序列中的获胜状态, 并可方便地用来计算各识别码模式的获胜概率和平均仲裁长度。各种模式单独出现的概率与获胜概率可以不同, 平均仲裁长度一般要比各模式单独出现的平均长度短些, 这一原理若用于数字系统中同步引导序列的模式设计, 可指望能设计出同步时间较短的同步序列。若把各种模式当作干扰, 则可认为各种干扰模式出现的频度可以不同, 进一步研究则是如何寻找最短仲裁长度的识别码组及指定各识别码的获胜概率后如何综合出相应的一组识别码模式。

参考文献

- 1 张文龙, 周明润, 张昊. 随机争用仲裁方法. 计算机科学, 1999, 26(11)
- 2 Viterbi A J, Omura J K. Principles of Digital Communication and Coding. Mc Graw-Hill Company, 1979
- 3 赵永昌, 编. 信号流程图及其应用. 人民邮电出版社, 1975