

85-86, 89

随机争用仲裁器

随机序列

概率

(29)

计算机科学2000Vol. 27No. 8

性能计算

随机争用仲裁性能计算

The Calculation of Randomly Competitive Arbitrating Performances

张文龙

张昱

0211.5

(上海师范大学 上海200234) (上海瀚达系统集成有限公司 上海200050)

Abstract A method for calculating the winning probability and average arbitrating lengths is presented. Theoretic results coincide well the computer simulations.

Keywords Arbitrator, Winning probability, Arbitrating length

随机争用仲裁器^[1]的性能指标: 获胜概率和平均仲裁长度可用如下方法计算:

1 0, 1随机序列中某模式首次出现概率及平均长度

今以01与11模式为例, 计算其在0, 1随机序列中首次出现的概率和首次出现的平均长度。

设仲裁器发出的序列 x_1, x_2, x_3, \dots 为独立随机变量序列, 且 $x_i=0$ 与 $x_i=1$ 出现的概率 $P[x_i=0]=P[x_i=1]=1/2$, 对所有 i 成立。

令事件 $\{Y=j\} \triangleq \{(x_{j-1}=1, x_j=1) \cap (x_1, x_2, \dots, x_{j-2}) \text{ 中无连续二个随机变量取值为1}\}$, 且 $j=2, 3, 4, \dots$ (1)

$P\{Y=j\} \triangleq P_{11}(j)$ 的概率为长度为 j 的0, 1随机序列中首次出现11模式的概率。

所有满足(1)式的长度为 j 的序列数设为 M_j , 则可知 $M_2=M_3=1$ 。为方便起见, 把长度为 j 的合法序列(即满足(1)式的序列)简称为 M_j 序列, 则有:

$$M_j = M_{j-1} + M_{j-2} \quad (2)$$

证明: 设 M_{j-1} 为合法序列数, 则在该序列前加一个0后, 构成长为 j 的合法序列。同样, 若 M_{j-2} 为合法序列, 则在该序列前添加10后也构成 M_j 合法序列, 因而 $M_j \geq M_{j-1} + M_{j-2}$ 。

另一方面, 若将 M_j 合法序列的首位为0的序列删去首位0, 则成合法 M_{j-1} 序列。若 M_j 序列的首位为1, 则第二位必为0, 故删去第一、二位后的序列也应为合法序列 M_{j-2} , 因而有 $M_j \leq M_{j-1} + M_{j-2}$ 。故(2)式成立。

求解(2)式差分方程并由初值 $M_2=M_3=1$ 可得:

$$M_j = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^j + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^j$$

因而

$$P_{11}(j) = P\{Y=j\} = M_j/2^j = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^j + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^j \quad (3)$$

其中, $j=2, 3, 4, \dots$

由(3)式可算得:

表1

j	2	3	4	5	6	7	8	...
P_{11}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{256}$...

据 $\sum_{j=2}^{\infty} j q^j = \frac{q}{(1-q)^2}$, 可计算11模式出现的平均长度为:

$$L_{11} = \sum_{j=2}^{\infty} j P_{11}(j) = 6$$

再计算01模式在0, 1随机序列中首次出现的概率及平均长度。

令事件 $\{Z=k\} \triangleq \{(x_{k-1}=0, x_k=1) \cap (x_1, x_2, \dots, x_{k-2}) \text{ 中无任何二个连续随机变量出现01模式}\}$, 且 $k=2, 3, 4, \dots$ (4)

对于以01结尾的长度为 k 的合法序列, 只有如下所示的方式:

		k-2						k		
k-1	{	0	0	0	0	...	0	0	0	1
		1	0	0	0	...	0	0	0	1
		1	1	0	0	...	0	0	0	1
		...								
		1	1	1	1	...	1	0	0	1
		1	1	1	1	...	1	1	0	1

上述每个序列出现的概率均为 $1/2^k$, 因而

$$P_{01}(k) \triangleq P[z=k] = (k-1)/2^k \quad (5)$$

其中, $k=2,3,4, \dots$. 由(5)式可算得:

表2

k	2	3	4	5	6	7	8	...
P_{01}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{7}{256}$...

首次出现01模式的平均长度为:

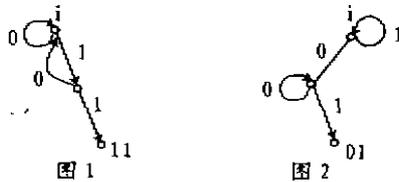
$$L_{01} = \sum_{k=2}^{\infty} k P_{01}(k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)/2^k$$

令 $k=j-1$ 代入上式, 并经若干运算后可得:

$$L_{01} = 2L_{01} - 4[1 + \sum_{j=0}^{\infty} (j-1)/2^j]$$

$$L_{01} = 4(1 + \sum_{j=0}^{\infty} j/2^j - \sum_{j=0}^{\infty} 1/2^j) = 4$$

对于其它模式, 虽然可类似地计算, 但相当繁杂. 建议用状态转移图^[2], 能较方便地完成相似的计算. 例如, 11与01模式的状态转移图如下:



令每条支路的传递系统数为 pt , 其中 p 为转移概率, 目前设为 $p=1/2$. t 为一参变量. 由梅森公式^[3]可得图1中从起始节点 i 到11节点的传递函数为:

$$T_{11} = \frac{pt \cdot pt}{1 - pt - pt \cdot pt} \quad (6)$$

令 $p=1/2$ 代入(6)式, 可得:

$$T_{11} = \frac{t^2/4}{1 - t^2/2 - t^4/4} = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{3}{32}t^5 + \frac{5}{64}t^6 + \frac{1}{16}t^7 + \frac{3}{256}t^8 + \dots$$

上式 t^k 的各项系数与表1对应项的系数吻合.

令 $p=1/2$ 代入(6)式, 并对 t 求导, 然后令 $t=1$, 既可得11模式首次出现的平均长度:

$$L_{11} = \frac{dT_{11}}{dt} \Big|_{t=1, p=1/2} = 6$$

与上面计算相吻合.

图2中, 从起始节点到01节点的传递函数为:

$$T_{01} = \frac{pt \cdot pt}{1 - pt - pt + pt \cdot pt} \quad (7)$$

令 $p=1/2$, 类似可得:

$$T_{01} = \frac{t^2/4}{1 - t + t^2/4} = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{16}t^4 + \frac{1}{8}t^5 + \frac{5}{64}t^6 + \frac{3}{64}t^7 + \frac{7}{256}t^8 + \dots$$

$$L_{01} = \frac{dT_{01}}{dt} \Big|_{t=1, p=1/2} = 4$$

与前述结论相符.

$L_{01} < L_{11}$, 可见01模式在竞争中要比11模式更容易获胜, 亦即在0.1随机序列竞争中, 01模式比11模式处于优先地位, 占较大的获胜优势, 能更多(优先)地取得对共享资源的使用权. 然而上述计算并没有考虑到两种模式在竞争中的相互影响. 例如, 11模式的合法模式011在竞争中根本不可能出现, 因为在011模式出现之前01模式已获胜. 为此, 必须考虑多个模式在实际竞争中的性态. 用获胜状态转移图可较好地表述和计算多模式相互竞争下获胜概率和平均仲裁长度, 计算结果令人寻味.

2 多模式间竞争优胜概率和平均仲裁长度

仍以01与11两模式为例, 它们的获胜状态转移图如图3所示.

用梅森公式可得:

$$T_{01} = \frac{pt \cdot pt + pt \cdot pt \cdot pt}{1 - pt}$$

$$T_{11} = \frac{pt \cdot pt(1 - pt)}{1 - pt}$$

令 $p=1/2$, 类似可得01与11模式获胜概率分别为:

$$P_{01} = T_{01} \Big|_{t=1, p=1/2} = 3/4$$

$$P_{11} = T_{11} \Big|_{t=1, p=1/2} = 1/4$$

平均仲裁长度:

$$L = \frac{d(T_{01} + T_{11})}{dt} \Big|_{t=1, p=1/2} = 3$$

可见 $L < L_{01} < L_{11}$, 且 $P_{01} : P_{11} = 3 : 1$.

计算机模拟结果: 产生10000个0,1随机序列, 01模式单独出现2498次, 11模式单独出现1682次. 但在竞争方式下, 01模式获胜2543次而11模式获胜838次. 模拟结果显示: $L_{01} = 10000 \div 2498 \approx 4$, $L_{11} \approx 6$, $2543 : 838 \approx 3 : 1$, $L = 10000 \div (2543 + 838) \approx 3$, 与理论计算相当吻合.

又例, 若三种模式分别为01, 100与110, 获胜态转移图如图4所示.

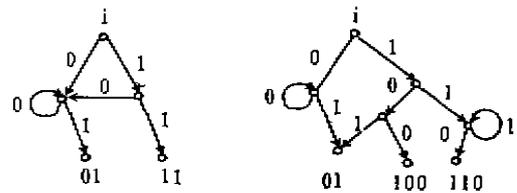


图3

图4

类似可得三种模式的传递函数分别为:

$$T_{01} = \frac{p^2 t^2 - 2p^4 t^4 + p^2 t^6}{1 - 2pt + p^2 t^2}$$

(下转第89页)

3 算法描述

现在给出曲线偶 (L_1, L_2) 逼近三次平面 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 的算法如下:

(1) 判断 $\bar{p}(t)$ 的位置矢量顶点 p_0, p_1, p_2, p_3 是否共线, 若共线则用直线段对其进行逼近; 否则进入第(2)步。

(2) 由(2)式判断 $\bar{p}(t)$ 是否存在拐点, 若存在则将拐点作为分割点 t_0 , 转第(6)步; 否则进入(3)步。

(3) 若 $\overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_0 p_1}$ 即 $\bar{p}''(0) = 0$, 则由(6)式计算 t_0 ; 若 $\overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_2}$ 即 $\bar{p}''(1) = 0$, 则由(7)式计算 t_0 ; 若 $\bar{p}''(0) \bar{p}''(1) > 0$, 则由(5)式计算 t_0 。然后将 t_0 作为分割点, 进入第(4)步。

(4) 由(3)和(4)式计算 (L_1, L_2) , 进入第(5)步。

(5) 对给定的误差限 $\epsilon > 0$, 若 $\max_{t \in [0,1]} \{\max_{i=1,2} \Psi_i(t)\} \leq \epsilon$ 成立, 则转第(7)步; 否则进入第(6)步。

(6) 将 Bezier 曲线从分割点 t_0 处分为两段, 并对每

段重复(2)至(6)步。

(7) 若还有尚未处理的 Bezier 曲线重复第(1)至(7)步; 否则进入第(8)步。

(8) 算法结束。

结论 本文所给算法, 我们已用 Visual C 语言在 D-XY 绘图机上实现, 用双曲线偶 (L_1, L_2) 逼近后生成的曲线与原 Bezier 曲线 $\bar{p}(t)$ 基本完全重合, 并且与文[2]中算法相比较, 精度高、速度快。若将该算法用于配有双曲线插补装置的数控绘图机, 其效果会更好。

参考文献

- 1 Bolton K M. B-splines. CAD, 1975(2): 89~94
- 2 常金玲, 张林波. 一种用圆弧逼近三次平面 Bezier 曲线的算法. 计算机学报, 1993, 16(10): 76~78
- 3 杜玉越. 一种用双曲线偶逼近三次平面 B 样条曲线的算法. 计算机工程, 1995, 21(1): 36~38
- 4 苏步青, 华直积. 双圆环逼近的推广. 复旦学报, 1979, 18(4): 1~9
- 5 苏步青, 刘鼎元. 计算几何. 上海科学技术出版社, 1981

(上接第86页)

$$T_{100} = p^3 t^2,$$

$$T_{110} = \frac{p^2 t^3 - p^4 t^4}{1 - 2pt + p^2 t^2}$$

相应的获胜概率分别为:

$$P_{01} = T_{01} |_{t=1, p=\frac{1}{2}} = 5/8$$

$$P_{100} = T_{100} |_{t=1, p=\frac{1}{2}} = 1/8$$

$$P_{110} = T_{110} |_{t=1, p=\frac{1}{2}} = 2/8$$

平均仲裁长度

$$L = \frac{d(T_{01} + T_{100} + T_{110})}{dt} |_{t=1, p=\frac{1}{2}} = 3.25。$$

计算机模拟结果: 对 10000 个 0, 1 随机序列 01, 100, 110 获胜次数分别为 1922, 380, 755 次。可见 $P_{01} : P_{100} : P_{110} \approx 5 : 1 : 2$ 。平均仲裁长度 $L = 10000 \div (1922 + 380 + 755) \approx 3.27$, 与理论计算相符。

若取模式为 010, 011, 110, 111 则获胜概率分别为 $3/8, 3/8, 1/8, 1/8$, 平均仲裁长度为 4。若取模式为 010, 011, 110, 100 则获胜概率分别为 $5/16, 5/16, 4/16, 2/16$, 平均仲裁长度为 3.875。若取模式为 010, 011, 100, 101, 则获胜概率各为 $1/4$, 平均仲裁长度为 4。均与模拟结果吻合。

又例, 6 个设备的识别码分别取为 01001, 01010, 01110, 01111, 11010, 11110, 计算机模拟结果表示各模式单独在 10000 个 0, 1 随机序列中出现次数分别为 279,

234, 307, 310, 319, 328。但在相互竞争状态下, 它们的获胜次数分别为 171, 153, 236, 247, 182, 49。出乎意料的是 11110 模式在单独统计中出现次数较高, 但在竞争中却处于劣势。

小结 获胜状态转移图能很好描述随机争用仲裁方式中各指定识别码模式在 0, 1 随机序列中的获胜状态, 并可方便地用来计算各识别码模式的获胜概率和平均仲裁长度。各种模式单独出现的概率与获胜概率可以不同, 平均仲裁长度一般要比各模式单独出现的平均长度短些, 这一原理若用于数字系统中同步引导序列的模式设计, 可指望能设计出同步时间较短的同步序列。若把各种模式当作干扰, 则可认为各种干扰模式出现的频度可以不同, 进一步研究则是如何寻找最短仲裁长度的识别码组及指定各识别码的获胜概率后如何综合出相应的一组识别码模式。

参考文献

- 1 张文龙, 周明润, 张昊. 随机争用仲裁方法. 计算机科学, 1999, 26(11)
- 2 Viterbi A J, Omura J K. Principles of Digital Communication and Coding. Mc Graw-Hill Company, 1979
- 3 赵永昌, 编. 信号流图及其应用. 人民邮电出版社, 1975