

矩阵共轭正交滤波器组

低通滤波器

(2)

图像处理

80-82

矩阵共轭正交滤波器组的生成

Construction of Matrix Conjugate Quadrature Filter Banks

王玲

崔小弟

TM713.4

TM911.73

(四川师范大学计算机科学系 成都610066) (北京理工大学应用数学系 北京100080)

Abstract A class of matrix conjugate quadrature filter banks (MCQF) in $L^2[0,1]$ is constructed based on the interval property of the multiwavelet. This MCQF banks possess simultaneously short supported, orthogonal and symmetric/antisymmetric with higher order of vanishing moments. We also give the order-1 balancer, and apply this MCQF in the image denoising and compression.

Keywords Multiwavelet, Matrix conjugate quadrature filter banks(MCQF), Balancer

1 引言

一组向量 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T$, 称为 r 元多小波, 如果其伸缩和平移 $\Psi_{j,k} = (\psi_1(2^j x - k), \dots, \psi_r(2^j x - k))^T$, $(j, k \in \mathbb{Z})$ 形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基。一般当 $r=1$ 时 Ψ 称为单小波, $r>1$ 时 Ψ 称为多小波。

与单小波一样, 生成多小波 Ψ 相应的多尺度函数 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T$ 仍然满足 r 元的多分辨率分析^[1], 于是存在 $r \times r$ 的矩阵 H_k 和 G_k , 使 Φ 和 Ψ 满足矩阵尺度方程:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \Phi(2x - k) \quad (1)$$

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \Phi(2x - k) \quad (2)$$

或在频域上表示为:

$$\hat{\Phi}(\omega) = H(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\Psi}(\omega) = G(\omega/2) \hat{\Phi}(\omega/2) \quad (3)$$

其中 H 和 G 分别是 $\{H_k\}$ 和 $\{G_k\}$ 的矩阵频率响应; 若 $H_k = 0$, $G_k = 0$, $k < 0$ 或 $k > N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ (这里 0_r 代表 $r \times r$ 的零阵), 则称 $\{\Phi, \Psi\}$ 是紧支的, 此时 $\{H, G\}$ 是 FIR 多滤波器组。

由 $\{\Phi, \Psi\}$ 的正交性可得到下面三个式子:

$$H(\omega)H^*(\omega) + H(\omega + \pi)H^*(\omega + \pi) = I_r$$

$$G(\omega)G^*(\omega) + G(\omega + \pi)G^*(\omega + \pi) = I_r \quad (4)$$

$$H(\omega)G^*(\omega) + H(\omega + \pi)G^*(\omega + \pi) = 0_r$$

称满足式(4)的多滤波器组 $\{H_k, G_k\}$ 为矩阵共轭正交滤波器(MCQF)组。

多小波具有许多好的性质, 例如能同时拥有短紧支, 正交、对称和高消失矩等, 这对单小波来说是不可能的^[2], 对多小波的理论研究越来越引起人们的重视, 并在信号去噪和图像压缩等应用中取得了满意的结果^[3], 然而其构造仍然是该领域的一个重要研究课题,

尤其是多滤波器组 $\{H_k, G_k\}$ 在实际应用中起着非常重要的作用, 本文对一类区间多小波低通和高通滤波器组的生成提出了简洁的构造方法, 给出了对应的一阶平衡器, 将其用在图像的压缩和去噪中作了一些讨论。

2 低通多滤波器组的生成

高 $P^k(x)$ 是次数不超过 $k-1$ 的多项式, 则 $V'_k = \{f | f = P^k(x), \text{当 } x \in (2^j n, 2^j(n+1)), k \leq r, n = 0, \dots, 2^j - 1; f = 0, \text{当 } x \text{ 在其它地方}\}$; 显然 V'_k 形成了一个嵌套: $V'_0 \subset V'_1 \subset \dots \subset V'_r \subset \dots$, 且: $\text{clos} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} V'_j = L^2([0, 1])$ 。

$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}_+} V'_j = \{0\}$, 经分析知 $\{V'_j\}$ 构成了一个 r 元的多分辨率分析。事实上, 这样的空间是文[4]的一个特例, 文[4]从仿射映射的角度给出了全面的分析, 但本文从区间性的角度出发来求其 CQF。

考虑 V'_0 空间上的一组 Riesz 基 $(1, x, x^2, \dots, x^{r-1})^T$, 对其作规范正交化后得到 V'_0 空间上的一组规范正交基 Φ , Φ 满足两尺度方程(1)。在已知 Φ 的情况下, 如何求得低通滤波器 $\{H_k\}$ 呢? 由于 $x \in (0, 1)$, 可改写式(1)为以下两个方程:

$$\Phi(x) = H_0 \Phi(2x), x \in (0, \frac{1}{2})$$

$$\Phi(x) = H_1 \Phi(2x - 1), x \in (\frac{1}{2}, 1) \quad (5)$$

由(5)式, 我们可以很方便地求出 H_0 和 H_1 , 最后得到通常的两尺度关系:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} H_0 \Phi(2x) + \frac{1}{2} H_1 \Phi(2x - 1)$$

例1 $r=3$ 时, $\phi_1 = 1, \phi_2 = \sqrt{3}(-1 + 2x), \phi_3 = \sqrt{5}(1 - 6x + 6x^2)$, 由(5)可得:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3/2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{15}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{15}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

可见该滤波器是紧支、正交、具有3阶消失矩,且是对称/反对称的。

3 高通多滤波器组的生成

取 V_j 在 V_{j+1} 空间的正交补 W_j , 即: $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 且 $W_j \perp V_j$, 于是我们得到 V_j 空间的一组分解: $V_j = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0$. 令 W_0 空间上的一组规范正交基是: $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)^T$, 则 Ψ 满足两尺度方程(2), 且 Ψ 具有 r 阶消失矩:

$$\int_0^1 \psi_j x^i dx = 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad j = 1, \dots, k$$

与单小波不同的是, 高通滤波器 G_k 不能由 H_k 直接得到, 只能借助正交化方程(4)来求, 也可以利用文[5]中给出的 Ψ 来求, 但比较麻烦. 考虑如下的变换矩阵 L :

$$L = \begin{pmatrix} H_0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_0 & H_1 \\ G_0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_0 & G_1 \end{pmatrix}$$

我们看到低通滤波器在作小波变换时没有支集重叠部分, 因此与之对应的高通滤波器全部在 $\text{Span}[H_0, H_1]$ 的零空间上, 所以 $[G_0, G_1]$ 就是 $\text{Null}([H_0, H_1])$ 上的一组规范正交基。

例2 对例1中 $r=3$ 构造的低通滤波器求出对应的高通滤波器, 令 $[H_0, H_1][G_0, G_1]^T = 0$, 利用 MATLAB 求出一组规范正交基如下:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 0.3536 & 0.6124 & 0 \\ 0 & -0.1464 & -0.9633 \\ 0 & 0.0991 & -0.2021 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -0.3536 & 0.6124 & 0 \\ 0 & 0.1464 & -0.1709 \\ 0 & -0.0991 & 0.9693 \end{pmatrix}$$

4 应用

分析前面构造的滤波器, 不难发现, 尽管 r 元多小



图1 Lenna 图像去噪: 输入信噪比=8
去噪后信噪比=14, 均方误差=10

波 Ψ 具有 r 阶消失矩, 但却是不平衡的, 多小波的平衡阶定义如下:

定义^[4] 多小波 Ψ 具有 K 阶平衡, 若与其对应的矩阵滤波器组 $\{H, G\}$ 保护/消灭 P_{k-1} 集 (即阶数 $k < K$ 的多项式)。

对单小波来说, K 阶消失矩即意味着 K 阶平衡, 但对多小波来说, 却不是这样. 可以通过以下的方法求得一阶平衡: 若 R 是一个任意正交的矩阵, $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 是正交的多尺度函数和多小波, 则 $\tilde{\Phi}(x) = R\Phi(x)$ 和 $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)$ 也是正交多尺度函数和多小波, 对应的多滤波器组是: $\tilde{H}(\omega) = RH(\omega)R^T$ 和 $\tilde{G}(\omega) = G(\omega)R^T$. 于是利用多小波的这个性质, 文[4]中给出了一阶平衡的条件是: 求 R , 使得 $V^T R \Phi(x) = a$, a 是一个任意常数, $V = (1, 1, \dots, 1)^T$; 称这样的 R 为平衡器. 事实上这样做只能求得一阶平衡. 高阶平衡的研究见文[6].

例3 对例1和例2中的滤波器, $r=3$, 由于 $(1, 0, 0)^T \Phi = 1$, 故只要求得规范正交阵 R , 使: $(1, 0, 0)^T R^T = a(1, 1, 1)^T$, a 是一个任意常数, 于是得到一阶平衡器:

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

显然这样的选择不是唯一的. 由于这一类多小波的矩阵滤波器组没有重叠部分, 因而在应用时不用作边界延拓, 对此作了 Lenna 图像 (192×192) 的压缩和去噪, 发现其计算速度快, 当压缩比要求不高, 或噪声强度不大的情况下, 能够取得非常满意的结果. 然而它们却不适合作低比特率压缩和强噪声的去噪, 因为没有支集重叠, 利用信息的相关性的能力就不强, 一旦阈值较大, 会出现令人无法接受的“方块”效应. 如何利用这类滤波器的优点还值得进一步研究. 用例1—3求出的结果作图像处理的部分结果见图1和图2。



图2 Lenna 图像压缩: 压缩比=20
峰值信噪比=29, 高频部分有88%的零元

多处理机环境中快速排序并行实现策略^{*}

The Implementation of Quick-sort in Multiprocessors

孙玉强¹ 吕海连² 李新慧¹ 魏淑桃¹(河南师范大学计算机系 新乡453002)¹ (平顶山师专计算机系 平顶山457000)²

Abstract This paper introduces the strategy of quick-sort and its application in multiprocessors, and provides two chosen pivots methods and the effect to the whole capacity.

Keywords Quick-sort, Parallel-machine, Data structure

并行处理机共享一个公共主存储器,并在一个操作系统的整体控制之下进行协调并实现相互通讯^[1],这种多处理机环境适合于大规模的数据处理,它可以把数据分布在并行处理机上,同时采用有效的并行算法而提高运行效率。但是处理机的数量和时间效率不一定成正比,有时可能因处理器的数量而降低。为了将快速排序应用于多处理机环境,必须深入研究其策略和各类分道机制的效能。

快速排序在多处理机环境中的运用主要有两个方面:一是枢轴选择机制的应用——以提高处理机内部的数据分组效率;二是在处理机内部排序中的应用——以加快各个处理机的排序速度。

1 多处理机环境的排序策略分析

对单个处理机而言,其执行效率依赖于解决问题的算法,但对于多处理机而言,除了单个处理机的运行性能外,处理机间的通信总量以及它们之间的相互合作也是一个主要的影响因素,所以相应的并行环境处理算法方案不仅能使资源均匀地分布在不同的处理机上,而且能使处理机间的通信量达到最小化并尽可能降低处理机之间的依赖性。

多处理机环境下排序方法的实现方案要兼顾处理机之间的协作性和单处理机的运行效率,在单个处理机进行目标序列排序之前,处理机之间的数据应该有可比性。所以,我们要首先考虑两个基本的处理机制:

1)利用有效的数据分送机制,达到处理机间数据的有序性分配。随机输入到各个处理机中的数据,经过数据在处理机之间的传送而形成处理机间数据的可比性,即:假设有 S 个有效处理机,分别为 $P_1, P_2, \dots, P_S$,经过数据传送后,使 P_1 中的数据都小于 P_2 中的数据, P_2 中的数据都小于 P_3 中的数据, ..., P_{S-1} 中的数据都小于 P_S 中的数据。

2)在单个的处理机内部选择快速排序算法同时结合插入排序对数据进行排序。

很明显,在多处理机环境中,第二个机制可以充分利用上述的快速排序方法进行解决,而采用什么样的机制使系统的运行性能达到最优则是第一个机制应解决的关键问题。

2 快速排序及枢轴的选择

算法的执行效率是衡量一个算法好坏的一个重要指标,而在快速排序算法中,枢轴的选择直接影响区间

^{*} 本项目受河南省自然科学基金资助,孙玉强 教授,主要研究方向为软件工程与环境等。

参 考 文 献

- 1 Goodman T N T, Lee S L. Wavelets of multiplicity r . Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 342 (1): 307~324
- 2 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. In: CBMS-NSF Regional Conf., in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1992
- 3 Bui T D, Chen G. Translation-Invariant denoising using multiwavelets. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46 (12): 3414~3420
- 4 Mitchell C A, Yuesheng X. Reconstruction and decomposition algorithms. Multidimensional Systems and Signal Processing, 1997(8): 31~69
- 5 Alpert B K, Rokhlin V. A fast algorithm for the evaluation of Legendre expansions. SIAMJ. Sci. Comput., 1991(12): 158~179
- 6 Lebrun J, Vetterli M. Balanced multiwavelets theory and design. IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, 46(4): 1119~1125