

图论编程 图论处理 迭代函数系 吸引子 计算机

68-71

Markov 双曲迭代函数系参数与吸引子关系的研究*

Research on the Effect of the Parameters of Markov Iterated Function Systems

刘向东 朱伟勇

赵雅明

TP391.41

(东北大学计算机信息科学与工程学院 沈阳110006)(鞍山师范学院 鞍山114001)

Abstract In this paper, the effect of the parameters of Markov iterated function systems was explored. The authors discussed how the finite Markov transition matrix act on the fractal attractor of a MIFS by symbol dynamical system, and gave out a necessary and sufficient condition when the fractal attractor of a MIFS does not correlate to the initial probability distribution of the MIFS.

Keywords Markov hyperbolic IFS, Markov chain, Probability transition matrix

1 引言

迭代函数系 IFS(Iterated Function Systems)是混沌分形理论研究的一个重要部分,其理论与方法是分形自然景观模拟及分形图像压缩的理论基础。1985年,Williams 和 Hutchinson 开创了分形几何中 IFS 的研究,建立了 IFS 的一般基础理论;M. F. Barnsley 和 S. Demko 的进一步工作使得这一方法成为构造任意维数分形集方便、有效的方法,并将之应用到图像的压缩与处理,使得该方法引起人们的关注^[1~3]。由于普通 IFS 吸引子形状比较规则,Karel Culik I 和 Simant Dube 为在吸引子的形状上取得有序和混沌的平衡,引入了 MRFS(Mutually Recursive Function Systems),通过对迭代函数序列进行控制以控制吸引子形状^[4];今天,IFS 的推广工作得到迅速的发展,如:Recurrent IFS、Mixing IFS、Hierarchical IFS (HIFS)、Markov IFS、Controlled IFS 和 Language-restricted IFS (LRIFS)等,F. V. Haeseler, H. -O. Peitgen 和 G. Skordev 通过矩阵替换系统证明:一维线性细胞自动机的整体行为模式可以用 IFS 的吸引子描述;而生成分形的另一方法—字符串替换法与 HIFS 一致^[5]。1994年, D. Canright 通过一个有限步算法给出任意给定 IFS 吸引子的某种意义的最优界,解决了计算机构造 IFS 吸引子的首要问题^[6]。Michael Frame、Maureen

Angers 与 Eduard Groller 等许多研究者从另一方面进行了推广研究,他们考虑了非线性迭代函数系 NIFS 及其吸引子构造与展示的方法,这一推广大大拓宽了 IFS 吸引子的范围及图像生成与编码的新的可能性,并利用其可能出现重复地址的特性给出图像新的指标^[7,8]。J. C. Sprott 利用一系列可变的随机参数来控制函数系,在一定的参数取值区间自动生成 IFS 的吸引子,讨论 IFS 的可生成的基本图元^[9]。本文讨论了 MIFS 初始概率分布对其吸引子起作用的充分必要条件这一个理论问题,并利用计算机实验数学的方法与符号动力系统这一工具说明其有限 Markov 转移矩阵对吸引子的各种作用。

完备度量空间 (X, ρ) 与定义在其上的有限压缩映射族 $w_n: X \rightarrow X, n=1, 2, \dots, N$, 组成一双曲迭代函数系 IFS, 记作: $\{X; w_n; X \rightarrow X, n=1, \dots, N\}$; 如果 w_n 的压缩比为 $c_n, n=1, 2, \dots, N$, 则称 $c = \max_{1 \leq n \leq N} \{c_n\}$ 为此 IFS 的压缩比。

在 X 的非空紧子集与其上的 Hausdorff 测度构成的分形空间 $(H(X), h_\rho)$ 上的变换 $W: H(X) \rightarrow H(X)$:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in H(X) \quad (1)$$

是 $(H(X), h_\rho)$ 上压缩比为 c 的压缩映射, 且存在唯一的不变集 $A \in H(X)$, 满足: $A = W(A)$, 并且对任意 $B \in H(X)$

* 本文得到国家博士点学科专项科研基金(97014510)及辽宁省自然科学基金(962177)项目资助。刘向东 讲师, 博士研究生, 主要研究领域为混沌分形计算机证明与构造、朱伟勇 教授, 博士生导师、辽宁省科协副主席, 主要研究领域为混沌分形最优设计计算机证明与构造。

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$$

A 称为该 IFS 的吸引子。

由一族压缩映射组成的 IFS 可以确定“复杂”的集一分形吸引子,它们一般是很优美的分形。因此,了解什么样的图形可以表成 IFS 的吸引子,或者由这样的集来近似,同时了解如何能找到可以对给定图像提供较好表现的 IFS,如果这些想法能实现,对一个复杂的图像,就能用带有少量参数的若干压缩映射来描述,这对信息的压缩,对各种图像的有效贮存和传输有极其重大的意义。

2 带概率的 IFS 分形吸引子与不变测度

由于压缩映射中每个映射的压缩比不相同,把它们同等对待将影响 IFS 吸引子的构造速度。根据压缩比的大小,可以为每个映射赋予一个概率。

定义1 带概率的 IFS 由双曲 IFS $\{X; w_1, \dots, w_N\}$

和一个数集 $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ 组成,且 $\sum_{i=1}^N p_i = 1 (p_i > 0, i = 1, \dots, N)$, 其中 p_i 对应于每次迭代选取 w_i 为迭代函数的概率。带概率的 IFS 记作 $\{X; w_1, \dots, w_N; p_1, \dots, p_N\}$ 。

由遍历定理,带概率的 IFS 迭代充分多步后仍然可以得到 IFS 的吸引子,并且在恰当选择 (p_1, p_2, \dots, p_N) 后可以加快 IFS 吸引子的生成速度。

除了吸引子 A 的形状以外,还有一个量与 p_i 紧密相联—吸引子上各点的“密度”;测度 μ, ν 描述了 A 上“质量”分布,这种“质量”的总体可以用迭代所需的次数近似表示。

对紧距离空间 (X, d) , μ 为 X 上的 Borel 测度,若 $\mu(X) = 1$, 称 μ 为 X 上的概率测度,以 $P(X)$ 表示 X 上的所有概率测度的集合,则 $P(X)$ 上对 $\forall \mu, \nu \in P(X)$, 有 Hutchinsonson 距离:

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f(x) d\mu - \int_X f(x) d\nu \right\}$$

其中 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的,并有 $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$, 对 $\forall x, y \in X$ 成立。 $(P(X), d_H)$ 也是紧距离空间。

定义2^[10] (X, d) 为一紧距离空间, $P(X)$ 为 X 上的概率测度组成的空间, $\{X; w_i; p_i, i = 1, \dots, N\}$ 为一带概率 IFS, 其 Markov 算子是函数 $M: P(X) \rightarrow P(X)$, $M(\nu) = p_1 \nu \circ w_1^{-1} + p_2 \nu \circ w_2^{-1} + \dots$

$$+ p_N \nu \circ w_N^{-1} \quad \forall \nu \in P(X) \quad (2)$$

Markov 算子将 X 上任一概率测度映射成用带概率 IFS 作用一次后的概率测度。

定理^[11] 对 $\forall \tau, \nu \in P(X)$, Markov 算子 M 有收缩性质:

$$d_H(M(\nu), M(\tau)) \leq c d_H(\nu, \tau)$$

其中: $0 < c < 1$ 为 IFS 的压缩比。尤其,肯定存在唯一的测度 $\mu \in P(X)$, 使得:

$$M(\mu) = \mu$$

称 μ 为含概率 IFS 的不变测度。

不变测度是带概率 IFS 的最基本的特征,不变测度定理表明:对任一概率测度,一定可以通过带概率 IFS 的不断作用使得概率测度序列收敛到该不变测度。

定理2^{[11]: [14]} (遍历定理) 设 B 为 X 上的 Borel 子集,且令 $\mu(B \text{ 的边界}) = 0$, 设 $N(B, n)$ 为轨迹 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 落在 B 中的点数, $n = 0, 1, 2, \dots$; 则以概率 1, 有:

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N(B, n)}{n+1} \right\}$$

对所有起始点 x_0 均成立。即 B 的“质量”是随机迭代方法生成的落在 B 中的点数。

3 Markov 双曲迭代函数系

将带概率的 IFS 推广,考虑由 Markov 链控制映射构成的 Markov 迭代函数系 MIFS。在带概率的 IFS $\{X; w_1, \dots, w_N; p_1, \dots, p_N\}$ 的随机迭代算法中,选择哪一个映射的概率分布与前一次被选中的映射没有关系,迭代是“遗忘的”。MIFS 作了推广。在 MIFS 迭代中下一次哪一个映射被选中的概率分布与前一次被选中的映射密切相关。

定义3 设 (X, ρ) 是完备度量空间,映射 $w_i: X \rightarrow X$ 为 Lipschitz 的, $i = 1, 2, \dots, N$, 令 $P = (p_{ij})_{N \times N}$ 为有限 Markov 转移矩阵(每行和为 1 的非负方阵), $\{p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^N\}$ 为一概率分布, 则称 $\{X; w_1, \dots, w_N; P; p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^N\}$ 为一个 Markov 双曲迭代函数系 MIFS, p_{ij} 表示前次选择的映射为 w_j 时,这一次选择映射 w_i 的概率; p_i^j 表示首次选择映射为 w_i 的概率。

对任一 P 和初始分布, MIFS 对应了唯一不变的概率分布,分布所在的区域构成其吸引子。MIFS 在函数的选择上加入了可控制的参数,有利于加强对图形的人为控制。理解 MIFS 的关键是把图像按照结构分到各个子平面上去,而结构间的关系由 w_i 来表示的; 它使我们在考虑图像中的相似性时不仅可以考虑局部与整体间的关系,也可以考虑局部与局部间的相似性^[11]。

4 MIFS 的参数与其吸引子的关系

当映射选取的分布独立相同且与初始概率分布相同时,即 $p_{ij} = p_j^i (i = 1, 2, \dots, N)$ 对每一个 j 成立, MIFS 就成为一般 IFS, 也就是说, IFS 是 MIFS 的一个特例。

4.1 初始分布与吸引子的关系

很多情况下, MIFS 的初始概率分布对其吸引子的形状及其上的不变概率分布没有影响, 这时 MIFS 可简记作 $\{X; w_1, \dots, w_N; P\}$, 定理3给出了 MIFS 与初始概率分布无关的充分必要条件。

定理3 MIFS $\{X; w_1, \dots, w_N; P; p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0\}$ 可以简记作 $\{X; w_1, \dots, w_N; P\}$, 当且仅当 P 存在极限分布 $\{p_1, \dots, p_N\}$; 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{pmatrix}$$

其中, $\{p_1, \dots, p_N\}$ 是方程组

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

满足条件

$$p_j \geq 0 \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

的唯一解。

证明: 当 P 存在极限分布 $\{p_1, \dots, p_N\}$ 时, 第 n 次选取映射的概率分布为: $(p_1^n, p_2^n, \dots, p_N^n) P^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_1^n, p_2^n, \dots, p_N^n) P^n = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_N^0)$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_N \end{pmatrix} = (p_1, \dots, p_N)$$

该极限分布与初始概率分布无关。

当 P 不存在极限分布时, P^n 至少存在2个子列 n_k 和 n_l 满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{n_k} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_N \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} \quad \text{和}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P^{n_l} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_N \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

第 n 次选取映射的概率分布 $(p_1^n, p_2^n, \dots, p_N^n) P^n$, 对任何大的 n 都与初始分布相关。

推论1 当 P^n 不含零元素时, MIFS 的吸引子的形状及其上的不变概率分布与初始概率分布无关。

证明: 当 P^n 不含零元素时, 一定有: 对任意的自然数 $k > n$, P^k 不含零元素。

由遍历定理, Markov 链存在一个极限分布:

$$\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

$\{p_1, \dots, p_N\}$ 是方程组

$$p_j = \sum_{i=1}^N p_i p_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

满足条件

$$p_j > 0 \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

的唯一解。

由于 P 有元素 $p_{ij} = 0$ 是 P^n 含零元素的必要条件, 推论1说明只有 P 含零元素的 MIFS 才可能与初始概率分布有关。

4.2 概率转移矩阵与吸引子的关系

MIFS 的转移概率矩阵与其吸引子形状的关系比较复杂, 我们通过一个刚触及的压缩映射族 $w_i (i=1, 2, 3, 4)$:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

利用符号动力系统说明它们之间的关系。

对平面上的区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ (记作 0), w_1, w_2, w_3 和 w_4 分别将其映为 $[0, 1/2] \times [0, 1/2]$, $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$, $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$ 和 $[1/2, 1] \times [1/2, 1]$, 将这4个区域分别记作1, 2, 3和4。 w_1, w_2, w_3 和 w_4 分别将1映为 $[0, 1/4] \times [0, 1/4]$, $[1/2, 3/4] \times [0, 1/2]$, $[0, 1/2] \times [1/2, 3/4]$ 和 $[1/2, 3/4] \times [1/2, 3/4]$; 分别记这4个区域11, 21, 31和41。类似地, w_1, w_2, w_3 和 w_4 分别将2映为12, 22, 32和42, 将3映为13, 23, 33和43, 将4映为14, 24, 34和44。这样的区域再经过 w_1, w_2, w_3 和 w_4 的映射形成3个符号表示的区域。可用这样的方法将区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 分成不同符号的子区域, 区域的符号满足: $a_0 a_1 \dots a_n (a_i = 1, 2, 3, 4)$ 表示的区域是一个小正方形, 将其平分4份, 按次序它们的符号为 $a_0 a_1 \dots a_{n-1}, a_0 a_1 \dots a_{n-2} a_n, a_0 a_1 \dots a_{n-3} a_n, a_0 a_1 \dots a_n$ 。

33	34	43	44
31	32	41	42
13	14	23	24
11	12	21	22

图1 区域的不同符号

对与初始分布无关的 MIFS, 其概率转移矩阵为 $P = (p_{ij})_{N \times N}$, 当 P 不含0元素时, MIFS 吸引子的形状与IFS吸引子的形状完全相同, 概率转移矩阵为 P 只影响其上的不变概率分布。由于充分长时间迭代后它们形状一致, 我们不讨论这一情况, 当 P 含0元素 p_{ij} 时, 由于每级小正方形被 MIFS 作用后不能达到的位置由 P 的0元素 p_{ij} 决定, 所以平面上符号最后2位为 ij 的子区域均不属于该MIFS的吸引子。这样, 通过对平

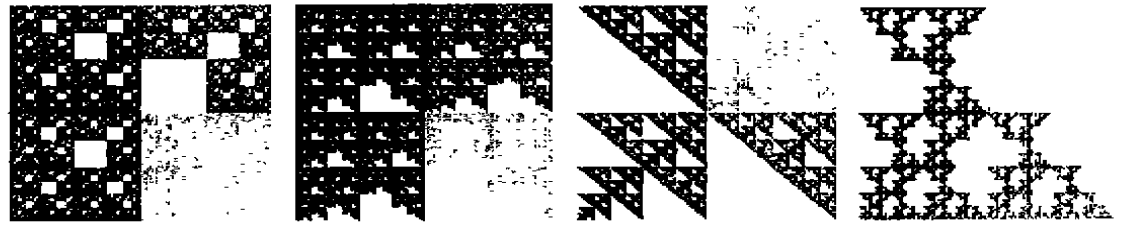


图 2(a) MIFS P_1 的吸引子 (b) MIFS P_2 的吸引子 (c) MIFS P_3 的吸引子 (d) MIFS P_4 的吸引子

面区域的分割及符号表达可以预测 MIFS 吸引子的形状。图 2 通过计算机实验也说明了这一对应关系。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

结束语 MIFS 极大地丰富了 IFS 可以表现的分形的范畴, 使我们在考虑图像中的相似性时不仅可以考虑局部与整体间的关系, 也可以考虑局部与局部间的相似性, 解决了“嵌套自相似”。

本文通过计算机实验数学的方法结合理论分析, 以符号动力系统为工具, 明确说明了 MIFS 中参数对吸引子所起的作用, 为应用 MIFS 进行自然景观的模拟与分形图像压缩提供了理论依据。

参 考 文 献

- 1 Barnsley M F, Demko S. Rational approximations of fractals. *Lecture Notes in Math*, 1984, 1105: 73~88
- 2 Demko S, et al. Construction of fractal objects with iterated function systems. *Computer Graphics*, 1985, 19: 271~278

- 3 Barnsley M F, Demko S. Iterated function systems and the global construction of fractals. In: *Proc. Royal Soc London*, 1985, 243~275
- 4 Culik K I, Dube S. Balancing Order And Chaos In Image Generation. *Comput. & Graphics*, 1993, 17(4): 465~486
- 5 Haeseler F V, et al. Linear Cellular Automata, Substitutions, Hierarchical Iterated Function Systems and Attractors, In: Encarnacao J L, et al. eds. *Fractal Geometry and Computer Graphics*, Springer-Verlag, 1991
- 6 Cannright D. Estimating The Spatial Extent of Attractors of Iterated Function Systems. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(2): 231~238
- 7 Frame M, Angers M. Some Nonlinear Iterated Function Systems. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(1): 119~125
- 8 Grotter E. Modeling And Rendering of Nonlinear Iterated Function Systems. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(5): 739~748
- 9 Sprott J C. Automatic Generation of Iterated Function Systems. *Comput. & Graphics*, 1994, 18(3): 417~442
- 10 Chung K L. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer-Verlag, New York 1967
- 11 Barnsley M F, et al. Recurrent Iterated Function Systems. *Const. Approx.*, 1989, 5: 3~31
- 12 Elton J. An ergodic theorem for iterated maps. *Erg. Th. and Dynam. Sys.*, 1987, 7: 481~488
- 13 Womack T E. Thesis—Linear and Markov Iterated Function Systems in Fractal Geometry. Virginia Poly-technic Institute and State University, Blacksburg, 1989
- 14 Layman J W, Womack T. Linear markov iterated function systems. *Comput & Graphics*, 1990, 14(2): 343~353