

量子力学和量子计算机

Quantum Mechanics and Quantum Computer

戴葵¹ 李承祖² 卢锡城³(国防科技大学计算机学院¹ 国防科技大学应用物理系² 长沙 410073)

Abstract In this paper, the relationship between computation and physics and the application of the principle of Quantum mechanics to Quantum Computing and Quantum Computers was reviewed.

Keywords Quantum computation, Quantum computer, Quantum mechanics

1 引言

在今后 10 到 20 年内,电子元器件的日趋小型化使一个微电子元件所涉及的原子数目达到一个或几个原子,而一个逻辑操作耗能将达到不可逆逻辑操作的热力学极限 KT 量级,这种趋势使人们不得不考虑原子遵循的量子力学规律将对未来的计算产生什么影响。另一方面,当人们使用功能强大的经典计算机模拟量子力学体系时,发现存在原则上的根本困难,即计算资源(时间、空间)将随着量子体系粒子数、自由度的增大而成指数倍增大。这就预示着按量子规律运行的计算机可能具有超出经典计算机的能力。

本文首先讨论一般的计算和物理学的联系,然后介绍量子力学原理在量子计算中的应用与量子力学规律有关的量子计算的一些特点。

2 计算和物理学

计算从经典意义上说属于数学范畴,计算的理论和计算方法可以脱离具体的物理过程,依靠纯粹的思辨和抽象的逻辑推理构造出来。虽然像 Turing、Church、Post 和 Godel 这些计算机科学的先驱,仅仅凭直觉就可以扑捉到计算的正确物理图像,但这些并不能证明计算是和物理学无关的。实际上,计算本质上是一个物理过程,计算不可能不受物理规律支配,计算的理论应当建立在物理规律基础之上。

数的产生与我们度量物体和描述物理过程的需要是紧密相关的,数学本身不能看作是发明,它应该是对物理过程中所包含的已有规律的发现。欧几里德几何学也决不能仅仅归结为先哲们先天直觉的领悟,实际

上也是我们所生活的物理世界空间结构的反映。特别是广义相对论的发现,进一步证明了更精确地描述空间结构的几何学应建立在物理规律基础之上,正是物质的存在和运动决定着时空构造,数学的本身,就是从物质世界的运行规律中抽象出来的。

什么是计算呢?计算本质上可以看作是计算机的物理系统执行的一个物理过程。根据采用的计算设备不同,这个物理过程也不相同,例如在算盘上完成的计算,用电子计算机完成的计算等,或许还可以包括人脑所完成的计算。但不管用什么样的计算设备,计算过程第一步是输入初始数据,从物理上可解释成在计算系统中制备一个初始物理态;第二步就是执行计算,这个过程实际上就是按照算法规定的步骤,演化这个初始态为对应输出态的过程;计算的最后一步是输出结果,给出问题的答案。这一步骤可以看作是对演化的末态进行测量,得到所需要信息的过程。因此,计算过程就可归结为制备物理态、演化物理态、最后对物理态进行测量的过程。当然,不同的计算设备执行这三个步骤的方式可能大不一样,但本质上都是一样的。从这个意义上说一切物理系统都可以看作是一个计算机,我们的宇宙就是一个大的计算机,不过这样的计算机或者没有明显的特征物理量能反映并能方便地提取我们需要的信息,或者它们的初始态(输入信息)不是我们需要的、它们的演化过程不是我们能够按算法要求控制的,因此它们的计算结果可能不是我们所希望得到的,反过来,如果我们能在一个物理系统中制备一个包含我们需要的输入信息的初态,并能按照算法需要演化它,并最终能从演化的末态中提取需要的结果,这个物理系统实际上就是一个计算机。

戴葵 副教授,博士,主要研究领域有:新一代计算机体系结构、并行处理技术、神经网络和量子信息处理技术;**李承祖** 教授,主要研究领域有:理论物理、量子信息处理技术;**卢锡城** 工程院院士,主要研究领域有:计算机体系结构、计算机网络。

最近 30 年中,随着大规模集成电路的出现,计算机元器件日趋小型化,人们越来越关注计算的物理内涵,1961 年,R. Landauer^[1]研究了不可逆计算过程中热产生问题,论证了计算机不可避免地包括有不可逆逻辑功能部件,这一逻辑的不可逆性与物理不可逆性相关,同时他还对典型的双稳态器件进行了详细的动力学分析,给出了计算速度和能量耗散之间的关系。80 年代初,Feynman^[2,3]研究了量子力学原理和不确定关系对计算机的可能限制,指出用经典计算机模拟量子力学系统存在内在的困难,提出了用量子力学性质执行计算可能比经典计算机更强有力的重要思想。1988 年,Keyes^[4]从物理上分析了“电子器件的小型化及其极限”,给出了储存一个信息单位需要的原子数目和双极晶体管基上掺杂杂质原子数目随年代变化情况,以及执行一个逻辑操作耗能情况的物理极限等。这些研究使人们更加透彻地了解了经典计算机的物理极限,也启发了人们更深入地研究计算和物理学之间的联系。

3 量子计算、量子计算机和量子力学

由于计算过程本质上是一个物理过程,可归结为制备物理态,演化物理态,最后对物理态进行测量。量子计算机作为一个计算设备,当然也包括这三个步骤,下面从量子力学的观点分析量子计算与经典计算相比所具有的新特点。

量子力学中的态、态迭加原理和量子信息存储

量子力学的一条基本原理是物理系统的态由 Hilbert 空间中的矢量描写,这些表示量子态的矢量称为态矢量(也简称态矢),Hilbert 空间在量子力学中称为态矢空间。

Hilbert 空间是一个数学概念,是定义了内积并满足完备性条件的线性矢量空间。这个空间中的矢量具有抽象的性质。为了对它描述的量子态有一些具体的概念,在量子力学中,把一个系统的量子态首先和制备这个系统的过程中所使用的宏观仪器、选定的参数值、经过的一套操作程序联系起来。指定量子系统的一个态,就是指定这个系统的组成、制备过程中使用的仪器、操作程序和选择的参数等。比如从电子枪发射,通过屏上一条窄缝的电子的量子态,就由发射电子、屏幕上窄缝等指定。通过屏上二条缝的电子的量子态就不同于通过一条缝的电子态,需要用不同的态矢描述。如果两个量子系统在制备过程中有关条件都相同,就可认为这两个系统有相同的量子态。比如,从屏上同一条缝出来的两个电子,我们说它们处在相同的电子态,一个量子态的物理性质由对这个态的多次重复测量确定。由于量子力学的测量结果不是唯一的,一个态矢的

相应物理性质就由对这个态测量力学量可能值的几率分布来描述。态矢中包含了力学量实现其某些特定值潜在可能性的全部信息。

量子力学的基本原理认为:一个量子系统的态矢完备地描述了该系统的态,也就是说系统的全部力学性质都可以由给出的态矢导出。例如在最简单的单粒子情况下,给出态矢 $\Psi(x, t)$ (假设已归一化),在 t 时刻测得粒子出现的几率就由 $|\Psi(x, t)|^2 dx$ 给出。要知道其它力学量 $\hat{F}$ 在这个态中的取值,只需将这个态按力学量 $\hat{F}$ 的正交归一完备本征函数系 $\{\Psi_n\}$ 展开,其展开系数 $\{\langle \Psi_n | \Psi \rangle\}$ 就是态 $\Psi(x, t)$ 在 F 表象中的表示,即 F 表象中的态矢, $|\langle \Psi_n | \Psi \rangle|^2$ 给出测量力学量 $\hat{F}$ 得到与 Ψ_n 对应的本征值 F_n 的几率。由此可见,态矢量具有几率幅的意义,其模方才给出测量得到某一可能值的几率。几率幅使量子力学理论与实际测量结果建立起了联系,Feynman 认为几率幅的概念是量子力学最基本的概念,自然界可以用几率幅描述,这是量子力学最重要的发现^[5]。量子系统具有与经典物理系统不同的许多不可思议的性质,大多都源于此。

由于态矢量是 Hilbert 空间中的一个矢量,Hilbert 空间首先是一个线性矢量空间,如果对一个量子力学系统, Ψ_1 是它的一个态矢, Ψ_2 也是它的一个态矢,由 Hilbert 空间的性质,有:

$$\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$$

其中: C_1 和 C_2 是两个复常数,且 $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$,即 Ψ 是归一化的。它也是 Hilbert 空间中的一个矢量,因此也是该系统的一个态矢量。这一性质称为量子力学态迭加原理,或几率幅迭加原理。量子计算机具有超出经典计算机不同寻常的能力,态矢迭加原理是最主要的基础之一。

在经典计算机中,基本的信息存储单元(bit)是一个二值物理系统,如晶体管的导通和截止,可以分别编码为 0 和 1,但在任何时刻,这个二值系统只能取两值之一。但是如果选取一个双态量子系统作为一个信息位(在量子计算机上称为“qubit”——量子位),可以记一个量子态为 $|0\rangle$ (比如电子的自旋向上态),另一个量子态为 $|1\rangle$ (电子自旋向下态),根据态迭加原理,这个量子位还可处在如下状态:

$$|\varphi\rangle = C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle$$

其中: C_0 和 C_1 是两个复常数,且 $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$,即 $|\varphi\rangle$ 是归一化的。

这就是说一个量子位,除了取 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态外,还可以同时取在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的迭加态,即同时包含有 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的信息。这样,一个量子位的态张起二维矢量空间,可以同时包含有两个不同的信息,即可同

时编码为 0 和 1。二个量子位系统的态张起一个四维矢量空间,有 $|0\rangle|0\rangle$ 、 $|0\rangle|1\rangle$ 、 $|1\rangle|0\rangle$ 和 $|1\rangle|1\rangle$ 四个独立的态,可以同时编码为 0、1、2 和 3。

一个由 L 个量子位构成的量子寄存器的态,张起一个 2^L 维矢量空间,具有 2^L 个线性独立的态,可同时编码 2^L 个不同的信息。由此看出量子态的迭加原理,使量子寄存器具有经典寄存器不可比拟的存储能力,这种能力正是量子计算机具有远远超出经典计算机信息处理能力所赖以的“量子并行”的基础。

量子态的演化和量子并行计算

根据量子力学的基本原理,量子态随时间的演化可以用一个线性么正演化算子 U 描述,可以将其定义为:

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$$

$U(t, t_0)$ 将 t_0 时刻的态变换为 t 时刻的态, U 是线性算子,且满足么正性条件,即:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

U 的么正性可以保证量子体系的态矢在演化过程中总几率保持不变,或者态矢的归一化条件不变, U 的线性性质表明量子态的演化过程是一个 Hilbert 空间中的线性变换序列。

演化算子的么正性对量子计算中的逻辑操作给出了一个限制条件,量子计算中的一切逻辑操作都必须执行么正演化。如果用矩阵来表示么正演化,那么这些表示矩阵必须是么正矩阵,另外,由于么正操作是可逆的,所以量子计算中一切逻辑操作都是可逆逻辑操作。

量子态的演化与经典态的演化之间存在着根本差别。在经典计算机中,即使存在从初态演化到末态的许多可能的路径,经典计算机也只能沿着其中一条路径进行演化(计算)。但在量子计算机中,由于可以制备出各个互不相同的态迭加所形成的初态,量子计算机具有对这些初态同时进行演化的能力,即量子计算机可以沿着各条互不相同的路径演化初始迭加态,直至得到对应的输出的迭加态,这就是所谓“量子并行计算”。这也就是量子计算机具有强大信息处理能力的基础。

量子计算机对量子态进行的演化过程就是对量子态执行算法要求的么正变换序列。设量子计算机有 L 个量子位,这 L 个量子位的态矢空间是 2^L 维的。量子计算机的一个态矢 V 是 2^L 个分量的迭加态。对这个态矢演化操作的矩阵表示是 $2^L \times 2^L$ 维么正矩阵 M , 设:

$$W = MV$$

如果直接用矩阵乘计算,对应着 W 矢量的每个分量,将需要进行 2^L 次乘,完成计算 W 共需要 $(2^L)^2$ 次乘运算。但在量子计算过程中,由于 V 的空间是 L 个二维矢量空间的张量积 $V^{(1)} \otimes V^{(2)} \otimes \dots \otimes V^{(L)}$, V 的每个组元(可以分别用 $i_1, i_2, \dots, i_L \in \{0, 1\}$ 标注),由相应

量子位上的几率幅表示;另外, M 可分解为简单张量积:

$$M = S^{(1)} \otimes S^{(2)} \otimes \dots \otimes S^{(L)}$$

其中,每个 $S^{(i)}$ 是作用在相应组元 $V^{(i)}$ 上的 2×2 矩阵。所以计算 $W = MV$ 就可表示为:

$$W_{i_1 i_2 \dots i_L} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_L} S_{i_1 j_1}^{(1)} S_{j_1 j_2}^{(2)} \dots S_{j_{L-1} j_L}^{(L)} V_{j_1 j_2 \dots j_L}$$

由于态 V 和算子 M 的张量乘积结构, $S^{(i)}$ 对第 i 个量子位只作用一次就自动完成了对全空间的总操作 $M = S^{(1)} \otimes S^{(2)} \otimes \dots \otimes S^{(L)}$ 。于是整个 M 操作可以花 $O(L)$ 的时间完成,这就是量子计算的加速作用。

量子计算的另一个重要研究结果是一个复杂的作用到多个量子位上的么正变换,可以由固定的给定的么正变换有限集合构造出来。比如量子傅立叶变换,就可以由两个基本的么正变换实现,其中一个作用是作用到一个量子位上的变换,另一个是作用到两个量子位上的变换。已经证明利用一些两个量子位的变换,就可以通过适当的组合描述任何对多个量子位的么正变换。把量子计算么正演化归结为两个量子位的么正变换,对量子计算机的实现具有重要意义,因为二个量子位上的变换,可以通过相对简单的物理系统实现。

由于量子计算机可以同时处在不同演化路径的线性迭加中,由这些不同路径的干涉给出计算结果。达到某一给定态的几率幅是所有可能达到这一个态的路径几率幅之和,而几率幅是复数,两个路径的几率幅可以有完全相反的相位,这种情况允许我们在“编程”量子计算时,利用这一特性增大所期望的计算结果出现的概率,而降低那些无意义的计算结果出现的概率。

量子力学中的测量和概率计算

量子力学理论认为测量过程是宏观测量仪器和微观量子体系相互作用的过程,通过测量认识到的微观客体的性质,只是在测量仪器作用这种特定条件下的性质。由于微观系统在被测量时受到宏观仪器的扰动,改变了原来制备过程中所限制的物理条件,因此不再属于原来的态,也就是说在测量时系统的态矢发生了不连续的突变,这就是所谓“坍缩”,系统的态矢将由于测量概率地坍缩到整个 Hilbert 空间的某个子空间中去。

量子力学的基本假设是:力学量(可观测量)用线性厄密算子描述,每次测量所得结果只可能是力学量算子 $\hat{F}$ 的本征值之一,当系统处在 $\hat{F}$ 的某一本征态 $|\Psi_n\rangle$ 时,测得结果是唯一确定的 F_n ,即 $\hat{F}$ 属于本征态 $|\Psi_n\rangle$ 的本征值。当系统处在一般的归一化态 $|\Psi\rangle$ 时,测得 $|\Psi_n\rangle$ 的某一本征值 F_n 的几率是 $|C_n|^2 = |\langle \Psi_n | \Psi \rangle|^2$, $C_n = \langle \Psi_n | \Psi \rangle$ 是态 $|\Psi\rangle$ 按 $\hat{F}$ 的正交归一完备本征矢组 $|\Psi_n\rangle$

>的展开系数。

根据量子力学的测量理论,在量子计算中对末态测量输出计算结果时,由于输出态不一定是特征力学量的本征态,测量输出一般不能得到唯一结果,只能以概率得到一些可能结果中的一个。测量所得到的量子计算结果是概率性的,需要从多次重复测量所得到的概率分布中提取问题的解答。

量子关联现象在量子计算中的应用

量子计算机的能力超出经典计算机的另一个原因就是“量子关联”。如果说量子叠加还存在经典对应的东西,那么关联现象则是经典物理中根本不存在的东西。量子关联或许是量子现象最不可思议的性质。

假设 A, B 都是一双态量子系统, A 的两个状态分别记为 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$, B 的两个状态记为 $|\beta_1\rangle$ 和 $|\beta_2\rangle$ 。一般情况下, A 和 B 都处在叠加态。

$$|\varphi_1\rangle = C_1|\alpha_1\rangle + C_2|\alpha_2\rangle$$

$$|\varphi_2\rangle = C'_1|\beta_1\rangle + C'_2|\beta_2\rangle$$

当 A 和 B 是两个独立系统(不存在相互作用),由 A 和 B 组成的大系统的态是这两个子系统态的张量积:

$$|\varphi\rangle = |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle$$

$|\varphi\rangle$ 是态 $|\alpha_1\rangle|\beta_1\rangle$ 、 $|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle|\beta_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle|\beta_2\rangle$ 的线性叠加。但是如果这两个子系统发生某种相互作用,系统的自由度将受到一些限制,存在着这样的一些态,它们不可能表达为两个子系统态的张量积,比如:

$$|\varphi\rangle = C_1|\alpha_1\rangle|\beta_1\rangle + C_2|\alpha_2\rangle|\beta_2\rangle$$

这样的态称为关联态。关联态也可以看作是一种特殊类型的叠加态。

为了了解量子系统的关联会产生什么奇异的效果,这里假设一个包含 A, B 两个子系统的量子体系处在关联态 $|\varphi\rangle$ 中,且 $|\varphi\rangle$ 是归一化的($|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$)。现在对系统 A 进行测量,如果测量结果 A 处在 $|\alpha_1\rangle$ 态中,这表明测量后系统处在 $|\alpha_1\rangle|\beta_1\rangle$ 描述的态中,从而 B 系统则无可选择地处在 $|\beta_1\rangle$ 态中。测量是对 A 进行的,根本没涉及到 B ,而 B 却一下子演变到 $|\beta_1\rangle$ 描述的态中,且 B 的演变是和对 A 的测量同时发生的。任何信息传递都需要时间,而这里并没假设 A 和 B 相距很近,那么 B 的演变是如何发生的呢?量子力学当前还不能回答这个问题,但量子力学肯定有这样的现象存在。

最早对量子力学这种关联提出质疑的是爱因斯坦^[7]。1935年,爱因斯坦等人提出了著名的 EPR 实验,认为发生相互作用并共存在一个系统中的 A 和 B 在分离开的那一时刻各自的状态就已确定,根本不必推迟到测量发生时才作出选择。爱因斯坦强调了两点:

一是“实在性”,即量子体系在任何时候都具有确定的动力学属性;二是“定域性”,即分离开的子系统间不存在即时的相互作用。这种观点通常称为“定域实在性”。波尔认为,EPR 实验中相距很远的两部分 A 和 B ,构成量子系统不可分割的部分,是互相关联的,虽然没有直接信号在它们之间建立联系,在对其中之一实行测量时,实际上改变了另一部分的环境,两者之间在行为上显示出协同合作效应。1965年,贝尔在“定域实在性”的假设下,对分离开的两个粒子同时进行测量的结果的可能关联程度建立了一个严格的限制条件,这就是贝尔不等式^[4],而量子理论要求分离系统间合作的程度要超过定域实在论逻辑许可的程度,这样贝尔不等式就建立了对量子力学关联直接进行实际检验的可能性。1982年,Alain Aspect^[8]报导了他们对钙原子单次跃迁中同时发射出的相反方向运动的光子对进行偏振测量的结果,证明了爱因斯坦所预言的可能的协作程度比实际测量结果低得多,量子力学肯定了“关联”确实存在。

在量子计算中,各个量子位作为整个量子寄存器这个大系统的一个子系统,通过相互作用,可以相互关联起来,从而可以编码更复杂的信息。和“叠加”一起共同支持大规模量子并行计算不同,关联既可以在量子计算机内部各量子位之间建立,也可以在量子位与环境之间存在。实际上,由于任何量子系统都不能和环境完全孤立,量子位和环境之间的关联,将引起处在叠加中的量子态“脱散”,破坏了量子计算机强大计算能力的基础,使有意义的量子信息消失到环境中去,这就产生了量子计算系统的不稳定问题,现在一般认为这是量子计算机实现的主要困难。

克服这种实现困难的一项重要技术是量子纠错技术,同时量子关联现象也会在量子纠错中发挥积极作用^[9]。量子关联现象在量子计算中既起着有利作用,又有破坏作用,人们正努力探索量子关联的物理模型和规律,减小关联对量子计算的破坏作用,使用关联现象保护我们需要的量子信息免受关联的破坏,稳定量子计算。

结论 计算本质上是一个物理过程,量子计算机是按照量子力学规律完成计算任务的系统(机器)。量子计算要求制备出处于叠加中的量子态,按算法需要对叠加态进行演化,最后对最终的叠加态进行测量,得到期望的输出结果。量子力学态叠加原理和量子关联提供了“量子并行”计算的基础,量子态的演化将量子计算过程限制为态矢的一系列么正变换,量子力学的测量理论要求量子计算是概率计算,量子关联现象会造成量子计算的不稳定性,但又可在量子纠错中用来稳定量子计算。

(下转第13页)

有深入讨论,每个演算为了增强它的表达能力,都会引入一些常量。

国内对于类型系统的研究相对来说较少,在80年代中后期,由于 Martin-L of 直觉类型理论的影响,国内开始开展了有关类型系统(理论)的研究,集中在逻辑类型系统研究方面^[27]。目前随着面向对象思想的日益重要,国内也开展了有关面向对象程序的类型系统研究^[28,29]。总的来说,国内对于类型系统的研究还很少,但随着国内对理论计算机科学研究的发展,类型系统的研究必会引起越来越多的学者注意和研究。

参考文献

- Girard J. Interpretation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur: [PhD thesis] Université Paris VI, 1972
- Reynolds J. Towards a theory of type structure. In: Proc. Colloque Sur la Programmation. New York, Springer-Verlag LNCS 19. 1974. 408~425
- Martin-L of P. Intuitionistic Type Theory. Bibliopolis, Napoli, 1984
- Nordström B, et al. Programming in Martin-L of's Type Theory. An Introduction. Oxford University Press, 1990
- Cardelli L. A semantics of multiple inheritance. Information and Computation, 1988, 76(2/3): 136~164
- Cardelli L, Wegner P. On understanding types, data abstraction, and polymorphism. Computing Surveys, 1985, 17(4): 471~522
- Compagnoni A B. Higher-Order Subtyping with Intersection Types: [PhD Thesis]. University of Edinburgh, 1995
- Castagna G, et al. A calculus for overloaded functions with subtyping. In: ACM Conf. on LISP and Functional Programming. San Francisco, 1992. 182~192
- Cardelli L, Longo G. A semantic basis for Quest. Journal of Functional Programming, 1991, 1(4): 417~458
- Cardelli L, et al. An extension of System F with subtyping. Information and Computation, 1994, 109(1-2): 4~56
- Abadi M, Cardelli L. A Theory of Primitive Objects: Second-order System. In European Symposium on Programming (ESOP), Edinburgh, Scotland, 1994
- Abadi M, Cardelli L. A Theory of Primitive Objects--Untyped and First-Order Systems. In Theoretical Aspects of Computer Software (TACS). Sendai, Japan, 1994
- Fisher K, et al. A lambda calculus of objects and method specialization. Nordic Journal of Computing (formerly BIT) 1994, 1: 3~37
- Fisher K, Mitchell J C. The Development of Type Systems for Object-Oriented Languages. Theory and Practice of Object Systems, 1996, 1/3: 189~220
- Pierce B C. Type System. Book Manuscript. Available at: <http://www.cis.upenn.edu/~bcpierce/>
- Compagnoni A B. Subject Reduction and Minimal Types for Higher Order Subtyping: [Technical report ECS-LFCS-97-363]. LFCS, University of Edinburgh, 1997
- Luo Zhaohui. An Extended Calculus of Constructions: [PhD thesis]. Department of Computer Science, University of Edinburgh, June 1990
- Coquand T, Huet G. The Calculus of Constructions. Information and Computation, 1998, 76(2/3): 95~120
- Pierce B C. Bounded quantification is undecidable. Information and Computation, 1994, 112(1): 131~165
- Pierce B C, Steffen M. Higher-order subtyping. Theoretical Computer Science, 1995
- Cook W R. A Denotational Semantics of Inheritance: [PhD thesis] Brown University, 1989
- Pierce B C, Turner D N. Simple type theoretic foundations for object-oriented programming. Journal of Functional Programming, 1994, 4(2): 207~248
- Bruce K, et al. Comparing Object Encodings. Information and Computation, 1998
- Barendregt H. Lambda calculi with types. In Gabbay Abramsky and Maibaum, editors, Handbook of Logic in Computer Science, Volume I, Oxford University Press, 1992
- Barthe G, Hatchiff J. A Notion of Classical Pure Type System (Preliminary version). Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 1997, 6
- Jacobs B. Categorical Type Theory: [PhD thesis]. University of Nijmegen, 1991
- 傅育熙. 类型理论原理. 软件学报, 增刊, 1997年6月: 457~465
- 全炳哲, 金淳兆, 玄顺姬. 面向对象类型理论的比较研究. 计算机研究与发展, 1997, 34(10): 736~741
- 全炳哲, 金淳兆, 李文辉. 基于类型理论的面向对象程序设计. 计算机学报, 1997, 20(1): 50~57

(上接第4页)

参考文献

- Landauer R. IBM J. Research and Development, 3, 183 (1961)
- Feynman R. Int. J. Theory Physics, 21, 467 (1982)
- Feynman R. Optical News 11, 11 (1985) (reprinted in Found. Phys. 16, 507 (1986))
- Keyes R W. IBM J. Research and Development, 32, 24 (1988)
- Feynman R, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals (1965), McGraw-Hill, ISBN 0-07-020650-3
- Ekert A, et al. Review of Modern Physics, 68, p733 (1996)
- 许良英等, 编译. 爱因斯坦文集, 第一卷, 商务印书馆, 1976. 366~367
- Bell J S. Physics, vol. 1, 195 (1964)
- Aspect A, et al. Physics Review Letter, 49, 1804 (1982)
- Preskill J. Available at: <http://xxx.soton.ac.uk/ps/quant-ph/9705031>, 1997