

小波变换

矢量积

信号分析

尺度函数

25

矢量积小波变换^{*}

Vector Product Wavelet Transform

88-90

李建平

(后勤工程学院一室 重庆400016)

T/911.6

张万萍 钟守铭

陈廷槐 徐问之

(电子科技大学应用数学系 成都610054) (重庆大学计算机研究所 重庆400044)

Abstract Up to now, all the wavelet transforms are product representation of Hilbert space. In this paper, based on the principle of mathematics and dialectical method, a new type wavelet transform—Vector product wavelet transform is put forward. The features and performance of the transform and its applications in signal processing are analyzed.

Keywords Wavelet transform, Vector wavelet, Vector product wavelet transform

1 矢量小波

函数方程

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N C_k \varphi(2x-k) \quad (1)$$

称为尺度方程,它在多尺度分析中起着举足轻重的作用。方程(1)的系数可以是实数亦可以是复数,(1)式的解 $\varphi(x)$ 称为尺度函数。

若式(1)有一个可积解 $\varphi(x)$,且 $\{\varphi(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个规范正交基,则从下式

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_{N-k} \varphi(2x-k) \quad (2)$$

得出的函数 $\psi(x)$ 称为小波函数, $\{2^{-t/2} \psi(2^{-t}x-k) | t, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个规范正交基。最早的规范正交基是由 Haar 构造的,称为 Haar 基。

$$\psi_H(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \quad (3)$$

对应的方程中, $N=1, C_0=C_1=1, \varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ 。Haar 基虽然十分简单,但它不连续, Danbechies 构造了世界上第一个连续的、紧支的规范正交小波 ψ_0 ,但是 ψ_0 的光滑度要随 N 的增大而增大,逼近阶以及 ψ_0 支集的大小亦随 N 的增大而增高或变大,当 $C_0, C_N \neq 0$ 时, $[0, N]$ 是包含 $\text{supp} \varphi$ 的最小区间, φ 的支集变大,局部性减小,另外,由于 N 增大,计算 φ 及 ψ 的复杂度也随之而增大。

为克服以上不足,近年来,有人从事矢量值小波的

研究,方程(1)代之以矩阵尺度方程,简记为 MRE (matrix refinement equation),其中 $C_0, C_1, \dots, C_N$ 均为 $r \times r$ 矩阵, φ 是 r 维矢量。小波 $\psi(x)$ 也由多个函数 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ 构成,亦即 $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_r(x))$ 。此时, $L^2(\mathbb{R})$ 中的基是 $\{2^{-t/2} \psi(2^{-t}x-k) | t, k \in \mathbb{Z}; t=1, 2, \dots, r\}$,其中 $\psi(x)$ 矢量是由下列矩阵系数方程给出:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^N d_k \psi(2x-k) \quad (4)$$

此时 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是 r 维矢量。注意到, $r=1$ 时,式(4)就是一般意义上的小波方程, $d_k = (-1)^k C_{N-k}; r>1$ 时,式(4)不是一般意义上的小波方程, $d_k \neq (-1)^k C_{N-k}$ 。

矢量值小波可以同时兼有许多良好性质,比如对称性、支集小及整数位移的正交性等。

2 矢量积小波变换^[1-3]

信号 $f(x)$ 的 Fourier 变换、Gabor 变换、小波变换的定义分别为

$$\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(\omega) = \langle f(x), e^{i\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (5)$$

$$Gf(x) = \langle f(x), g(x-mb) \rangle e^{imx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-mb)} e^{-imx} dx \quad (6)$$

$$Wf(x) = \langle f(x), \psi_{a,b}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \quad (7)$$

其中式(6)中的 $g(x)$ 又称为窗函数,故式(6)亦称为加

* 国家自然科学基金和重庆市中青年科技专家基金资助项目,李建平 博士,研究方向是小波分析及其应用;张万萍 硕士;陈廷槐 教授,博导;徐问之 教授。

窗 Fourier 变换,式(7)中的 $\psi_b(x) = |a|^{-1} \psi(\frac{x-b}{a})$, 称为小波函数,其母小波 $\psi(x)$ 应满足允许条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < +\infty$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx < +\infty$.

下面分别列举方向小波变换、非线性小波变换、广义小波变换。

$$Wf(a, \theta, \rho) = \iiint f(x, y, z) \psi_a(x \cos \theta + z \sin \theta - \rho) \psi_a(y \cos \theta - z \sin \theta - \rho) dx dy dz \quad (8)$$

其中 $\begin{cases} x \cos \theta + z \sin \theta - \rho = 0, 0 \leq \theta < \pi \\ y \cos \theta - z \sin \theta - \rho = 0, 0 \leq \theta < \pi \end{cases}$ 是三维空间的一条直线。

$$Wf(x) = \langle f(x), \psi_b(x) \rangle = \int f(x) \psi_b(x) dx \quad (9)$$

其中 $\psi_b(x) = a^{-1} \psi(\frac{x-b}{a})$, 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 式(9)即转化为式(7)。

给定函数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 及任何函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义 f 的广义小波变换为:

$$W_h f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) h(x+t+y) dt \quad (10)$$

注意当 $n=1$ 及 $y \neq 0$ 时, 有

$$|y|^{-1} W_h f\left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y}\right) = |y|^{-1} \int f(t) h\left(\frac{t-x}{y}\right) dt = |y|^{-1} \nabla f$$

这里 ∇f 即为通常意义下相应于线性群的小波变换。回到高维情况, 注意当 $n>1$ 时, h 一般不属于 $L^2(\mathbb{R}^n)$, 此时, $W_h f$ 对通常 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 没有意义。

我们对小波变换本身进行了较长时间的观察和分析, 对其数学原理、物理机理及工程背景进行了深入探讨, 发现至今为止的各种变换(如式(5)~(10))均基于一个根本事实: 内积, 即将信号 $f(x)$ 与一个特殊的分析函数做内积, 其结果是被分析信号 $f(x)$ 在分析函数(如 $\psi_{a,b}(x)$)上进行分解和投影。

从数学上讲, 内积又称为点积或数量积, 其优点是: ①线性变换; ②平滑信号函数; ③便于理论分析; ④计算简单。其缺点是: ①数量积(或称内积)起平滑作用, 这样会漏掉一些原始信息, 信号的真实状态得不到完全真实反映; ②投影分解的严格规律性对信号来说往往并不是最好的。

我们称基于数量积的小波变换为数量积小波变换(如式(7)~(10))。能否构造一种小波变换既能保留数量积小波变换的优点, 又能克服其不足呢? 对此, 我们进行了较长时间的探索, 数学与辩证法告诉我们, 数量积与矢量积是一对概念范畴, 有数量积必有矢量积, 反之, 有矢量积必有数量积, 矢量积强调“矢量”有明显的方向特性, 且更能真实地反映信号的特点, 基于此, 我们提出矢量积小波变换(vector product wavelet trans-

form), 简记为 VW, 其定义如下。

记 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 为 d 维平方可积空间, r 为本文2节矢量小波的维数, $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ 为 r 维矢量信号, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ 为 r 维矢量小波, 其自变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

定义1 $d=3, r=3$ 时的矢量积小波变换为

$$VWf = f \times \psi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (\langle f_2, \psi_3 \rangle - \langle \psi_2, f_3 \rangle) \vec{i} - (\langle f_1, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f_3 \rangle) \vec{j} + (\langle f_1, \psi_2 \rangle - \langle \psi_1, f_2 \rangle) \vec{k} = (\langle f_2, \psi_3 \rangle - \langle \psi_2, f_3 \rangle) \vec{i} + (\langle f_1, \psi_2 \rangle - \langle \psi_1, f_2 \rangle) \vec{k} - (\langle f_1, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f_3 \rangle) \vec{j} \quad (11)$$

注意: ①式(11)中 $f \times \psi$ 的“ $\times$ ”表示矢量积($r>1$), $r=1$ 时, “ $\times$ ”自动退化为一般意义上的数量积即内积, 可见(11)是传统小波变换的推广; ②式(11)中的 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示三维空间中3个单位矢量, 更高维情况下可用 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \dots, \vec{l}$ 表示, 这些符号仅仅是作为记号使用, 没有特殊的作用; ③式(11)是三阶行列式的展开形式, 其中每两个函数的乘积均以内积即积分表示, 积分以三元积分即 $dx_1 dx_2 dx_3$ 进行, $d=1$ 时为一元积分。

定义2 $d=3, f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ 中的 $r=1, \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ 中的 $r=3$ 时的矢量积小波变换为:

$$VWf = f \times \psi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f & f & f \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & f \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} f & f \\ \psi_1 & \psi_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} f & f \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} \vec{k} = (\langle f, \psi_3 \rangle - \langle \psi_2, f \rangle) \vec{i} - (\langle f, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f \rangle) \vec{j} + (\langle f, \psi_2 \rangle - \langle \psi_1, f \rangle) \vec{k} \quad (12)$$

式(12)中的符号解释与式(11)相同。

定义3 $d=3, r=4$ 时的矢量积小波变换为:

$$VWf = f \times \psi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & f_4 \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} - \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{l} = (\langle f_2, \psi_3 \rangle + \langle \psi_2, \psi_4 \rangle - \langle f_3, \psi_4 \rangle - \langle \psi_3, f_4 \rangle - \langle f_1, \psi_4 \rangle - \langle \psi_1, f_4 \rangle - \langle f_3, \psi_4 \rangle + \langle f_1, \psi_2 \rangle + \langle \psi_1, f_4 \rangle + \langle f_2, \psi_4 \rangle - \langle \psi_2, f_4 \rangle - \langle f_1, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f_3 \rangle - \langle f_2, \psi_3 \rangle + \langle f_1, \psi_2 \rangle + \langle \psi_1, f_2 \rangle - \langle f_2, \psi_1 \rangle - \langle \psi_2, f_1 \rangle) \vec{l}$$

$$f_4) = \langle \psi_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \psi_4 \rangle, \langle \psi_2, f_3 \rangle + \langle \psi_1, f_2 \rangle \\ + \langle f_1, \psi_3 \rangle = \langle f_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, f_3 \rangle = \langle f_2, \psi_3 \rangle \quad (13)$$

式(13)中的符号解释与式(11)相同。

定义4 $d=3, f=(f_1, f_2, \dots, f_r)$ 中的 $r=3, \psi=(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)$ 中的 $r=1$ 时的矢量积小波变换为:

$$VWf = f \times \psi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi & \psi & \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} \bar{j} + \\ \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} \bar{k} = (\langle f_2, \psi \rangle - \langle \psi, f_3 \rangle, \langle \psi, f_3 \rangle - \langle f_1, \psi \rangle, \\ \langle f_1, \psi \rangle - \langle \psi, f_2 \rangle) \quad (14)$$

式(14)中的符号解释与式(11)相同。

定义5 $d=3$, 普遍意义下的矢量积小波变换为:

$$VWf = f \times \psi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} & \dots & \bar{i} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_r \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \dots & \psi_r \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{r \times r} \quad (15)$$

$1 \leq r \leq 4$, 其表达式完全按第1行展开, 形成的矢量作为小波变换的结果。

式(11)~(15)统称为矢量积小波变换。矢量积小波变换的平凡情形(即 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 均为数量值)是一般意义的数量小波变换(7), 从这个意义上讲矢量积小波变换是数量积小波变换的一种推广。观察式(11)~(15), 我们发现矢量积小波变换仍然是线性变换, 故可用它对信号进行分解与合成, 其计算同样简单。由于经式(11)~(15)变换后的信号最终成为一个矢量, 其维数与矢量小波的维数一致, 故更能精确地反映出信号本身的各种特性, 且不易漏掉信号的原始信息。前面介绍的矢量小波的缺点是理论证明与具体计算比较困难, 而矢量积小波变换却在这方面反映并不明显。

3 矢量积小波变换的多级分解

为方便简捷起见, 以定义1的形式说明矢量积小波变换的多级分解, 其它情形类似。

定义1定义的式(11)称为信号 $f(f^0=f)$ 的一级分解, 其结果记为 f^1 , 亦即

$$VWf^1 = f^0 \times \psi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ f_1^0 & f_2^0 & f_3^0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = (\langle f_2^0, \psi_3 \rangle - \langle \psi_2, f_3^0 \rangle, \langle \psi_1, \psi_3 \rangle - \langle f_1^0, \psi_2 \rangle, \langle f_1^0, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f_2^0 \rangle)$$

$$f_3^0) = \langle f_1^0, \psi_3 \rangle, \langle f_1^0, \psi_2 \rangle - \langle \psi_1, f_2^0 \rangle = f^1 \quad (16)$$

将 f^1 取代 f^0 即得二级分解

$$VWf^2 = f^1 \times \psi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

于是得到矢量积小波变换多级分解的迭代公式

$$VWf^{n+1} = f^n \times \psi = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ f_1^n & f_2^n & f_3^n \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} \quad (18)$$

4 矢量积小波变换的重构公式

根据空间解析几何及泛函分析理论知道, 对于空间中的三个矢量 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 有:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \quad (19)$$

在式(18)左右两端同时与矢量小波函数 ψ 作内积并注意到式(19)有:

$$\langle VWf^{n+1}, \psi \rangle = \langle f^n \times \psi, \psi \rangle = f^n \cdot (\psi \times \psi) = f^n \cdot 0 = 0 \quad (20)$$

亦即

$$\begin{cases} (\langle f_2^n, \psi_3 \rangle - \langle \psi_2, f_3^n \rangle) \psi_1 = 0 \\ (\langle \psi_1, f_3^n \rangle - \langle f_1^n, \psi_2 \rangle) \psi_2 = 0 \\ (\langle f_1^n, \psi_3 \rangle - \langle \psi_1, f_2^n \rangle) \psi_3 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

再将式(21)中的 $f_i^n (i=1, 2, 3)$ 分别展开为 $\psi_k (k=1, 2, 3)$ 的线性组合代入式(21), 求出其展开系数即得 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ 。式(21)就是矢量积小波变换的重构公式。由迭代公式(18)与(21)完成对信号的分解和重构。

结论 传统意义下的小波变换(含其它变换)均是以 Hilbert 空间中的内积作为展开式, 我们统称为数量积小波变换。本文基于数学与辩证法原理, 分析小波变换的内在本质及信号本身的特征, 首次提出矢量积小波变换。这种变换将信号(数量值或矢量值)变为一个矢量, 因而具有明显的方向与运动特征, 具有更普遍的代表性, 故特别适合三维活动图像处理 and 运动弱目标识别和其它信息信号处理。

参考文献

- 1 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 重庆: 重庆出版社, 1997
- 2 李建平. 矢量积小波变换及小波分析的理论与应用研究. [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 1998. 6
- 3 李建平, 唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1999