图像噪声去除的小波相位滤波算法

A Wavelet Phase Filtering Algorithm for Image Noise Reduction

赵瑞珍　徐　龙　宋国乡

（西安电子科技大学理学院　西安710071）

Abstract Most of the wavelet denoising methods available are based on magnitudes. However, for the images with low SNR, the edges of the image in the wavelet domain are hidden in the noise. A wavelet phase filtering algorithm is presented in this paper, which is insensitive to the magnitude of image.

Keywords Wavelet transform, Phase, Image processing, Noise reduction

利用小波变换进行信号与图像去噪是小波应用的一个重要方面，小波变换具有"变焦"时频局部化特性，可以实现紧支集正交变换，使得其在数据压缩、图像处理与去噪等领域得到广泛应用[1-2]，并且得到了不少较为成熟的算法。在大量的小波去噪文献中，以基于小波幅度去噪的研究居多，而本文则欲讨论基于小波相位特性的图像去噪方法。通过对图像作二维小波分解，然后对各尺度上得到的小波系数依据相位特性进行滤波，由所余系数重构图像即可得到去噪的结果。

1　图像的快速小波分解

1.1　小波分析理论

所谓小波分析，从数学角度去看，它属于调和分析的范畴，但从事计算数学的工作者把它认为是一种近似计算的方法，用于把某一函数在特定空间内按照小波基展开；从工程角度去看，小波分析是一种信号与信息处理的工具，是继 Fourier 分析之后的又一有效的信号分析方法。小波变换作为一种新的多分辨分析方法，特别适合于处理非平稳信号。

小波分析与 Fourier 分析的本质区别在于：Fourier 分析只是考虑时域和频域之间的一对一映射，它以单个变量（时间或频率）的函数表示信号；小波分析则利用联合时间-尺度函数分析非平稳信号。小波分析与时频分析的区别则在于：时频分析在时频平面上表示非平稳信号，小波分析描述非平稳信号虽然也在二维平面上，但不是在时频平面上，而是在所谓时间-尺度平面上。在小波分析中，人们以不同的尺度（或分辨率）来观察信号，信号分析的这种多尺度（或多分辨率）的观点是小波分析的基本点。

设 $\Psi(x)\in L^2(R)$ 满足允许条件[1]

$$\int_R |\hat{\Psi}(\omega)|^2|\omega|^{-1}d\omega<+\infty \tag{1}$$

由称 $\Psi(x)$ 为母小波，令 $\Psi_s(x)=\frac{1}{s}\Psi(\frac{x}{s})$，则

$$Wf(s,x)=f*\Psi_s(x)=\int_R f(t)\Psi_s(x-t)dt$$

$$=\frac{1}{s}\int_R f(t)\Psi(\frac{x-t}{s})dt \tag{2}$$

为 f 的卷积型小波变换。若 s 离散取值，则得到离散小波变换，特别地，若 $s=2^j$，则为二进小波变换。

尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\Psi(x)$ 是小波理论的核心，然而在工程实现时并不直接采用 $\varphi(x)$ 和 $\Psi(x)$（一方面，计算量大；另一方面，实际中，大多数 $\varphi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 并无显式表达式），而是事先将这两个函数进行变换，使得它们与滤波器对应起来，便于实现。具体地讲，$\varphi(x)$ 对应于低通滤波器 $H(\omega)$、$\Psi(x)$ 对应于高通滤波器 $G(\omega)$，$h(n)$ 和 $g(n)$ 分别为相应滤波器的冲激响应。

1.2　图像的快速小波变换

令 $S_{2^0}^d f=f(x,y)$ 为大小为 $N\times N$ 的一幅图像，其二维小波变换快速分解算法为[4]：

$j=0\sim j-1$

$W_{2^{j+1}}^{1d}f=S_{2^j}^d f*(G_j,D)$

$W_{2^{j+1}}^{2d}f=S_{2^j}^d f*(D,G_j)$

$S_{2^{j+1}}^d f=S_{2^j}^d f*(H_j,H_j)$

其中 $S_{2^j}^d f*(G_j,D)$ 表示原始图像的行与列分别与滤波器 G_j 和 D 进行卷积，其他类同。$S_{2^j}^d f$ 为低通分量，$W_{2^j}^{1d}f$ 为水平高通分量，$W_{2^j}^{2d}f$ 为垂直高通分量，大小都

赵瑞珍　博士生，主要研究兴趣为小波理论及其在信号与图像处理中的应用、小波去噪算法。**徐龙**　硕士生，主要研究兴趣为小波变换及其在信号处理中的应用。**宋国乡**　教授，博导，主要研究兴趣为小波理论及其在电子工程中的应用，数学建模、算法及应用。

为 $N\times N$。相应的二维小波变换重构算法为：

$j=J\sim 1$

$$S_{2^{j-1}}^d f = W_{2^j}^{1d} f * (K_{j-1}, L_{j-1}) + W_{2^j}^{2d} f * (\bar{L}_{j-1}, \bar{K}_{j-1}) + S_{2^j}^d f * (\bar{H}_{j-1}, \bar{H}_{j-1}),$$

其中 $\bar{H}_j$ 为 H_j 的共轭转置，其他类同。

上述 H_j、G_j、K_j 和 L_j 分别对应于尺度函数和小波函数的传递函数 $H(\omega)$、$G(\omega)$、$K(\omega)$ 和 $L(\omega)$，它们之间满足[4]：

$$|H(\omega)|^2+G(\omega)K(\omega)=1 \tag{3}$$

$$L(\omega)=\frac{1+|H(\omega)|^2}{2} \tag{4}$$

H_j、G_j、K_j 和 L_j 对应的滤波器系数如表1所示。

表1 尺度函数和小波函数对应的有限冲激响应系数

n	H	G	K	L
−3			0.0078125	0.0078125
−2			0.054685	0.046875
−1	0.125		0.171875	0.1171875
0	0.375	−2.0	−0.171825	0.65625
1	0.375	2.0	−0.054685	0.1171875
2	0.125		−0.0078125	0.046875
3				0.0078125

图像经二维小波变换分解之后，分别得到图像的低频分量和水平与垂直高频分量。图像的低频部分集中了其主要能量，高频部分为细节部分。图像去噪的基本思想是先对含噪图像进行二维小波变换，由小波变换的线性性可知变换之后的小波系数依然是由图像和噪声两部分对应的。由于图像对应的小波系数在各尺度之间具有一定的相关性，而噪声对应的小波系数却依然是随机分布，不具有该特性，因此我们根据小波系数在各尺度之间的联系可以对图像和噪声对应的小波系数加以区别，滤掉由噪声对应的小波系数，然后再进行小波逆变换，便可得到去噪之后的图像[5,6]。

2 小波相位滤波

定义1 设 $W_{2^j}^{1d}f(x,y)$ 和 $W_{2^j}^{2d}f(x,y)$ 分别为图像 $f(x,y)$ 经二维小波变换分解之后，在尺度 j 上得到的水平分量和垂直分量，则我们称

$$M_{2^j}f(x,y)=\sqrt{|W_{2^j}^{1d}f(x,y)|^2+|W_{2^j}^{2d}f(x,y)|^2} \tag{5}$$

为图像在尺度 j 上的小波变换模值。

定义2 设 $W_{2^j}^{1d}f(x,y)$ 和 $W_{2^j}^{2d}f(x,y)$ 分别为图像 $f(x,y)$ 经二维小波变换分解之后，在尺度 j 上得到的水平分量和垂直分量，则我们称

$$A_{2^j}f(x,y)=\arctan\frac{W_{2^j}^{2d}f(x,y)}{W_{2^j}^{1d}f(x,y)} \tag{6}$$

为图像在尺度 j 上的小波变换相位。

2.1 同一尺度内局部相位比较

由于图像的边缘具有一定的连续性，因此它经过小波分解之后每一位置的幅值与相位都与其周围一个领域的平均值有较大的相关性。基于这一思想，对于任一像素点 (x,y)，我们给定一正整数 M_j，并令

$$\overline{W}_{2^j}^{1d}f(x,y)=\sum_{k=-M_j}^{M_j}\sum_{l=-M_j}^{M_j}W_{2^j}^{1d}f(x+k,y+l) \tag{7}$$

$$\overline{W}_{2^j}^{2d}f(x,y)=\sum_{k=-M_j}^{M_j}\sum_{l=-M_j}^{M_j}W_{2^j}^{2d}f(x+k,y+l) \tag{8}$$

其中 M_j 为窗宽。于是，(x,y) 点处的小波平均相位定义为

$$\overline{A}_{2^j}f(x,y)=\arctan\frac{\overline{W}_{2^j}^{2d}f(x,y)}{\overline{W}_{2^j}^{1d}f(x,y)} \tag{9}$$

如果 (x,y) 是真正的图像边缘点，则 $A_{2^j}f(x,y)$ 与 $\overline{A}_{2^j}f(x,y)$ 的差异不会很大，否则，(x,y) 点被认为是噪声占优的，予以剔除。这一过程可通过对 $A_{2^j}f(x,y)-\overline{A}_{2^j}f(x,y)$ 进行阈值处理[7]而实现。算法步骤为：

1 取 $j=1$，计算图像的小波变换相位 $A_{2^j}f(x,y)$；

2 选择一窗宽 M_j；

3 计算小波平均相位 $\overline{A}_{2^j}f(x,y)$；

4 选一阈值 θ_j，如果 $|A_{2^{j+1}}f(x,y)-\overline{A}_{2^j}f(x,y)|>\theta_j$，则 (x,y) 点处的边缘信息主要是由噪声引起的，重构图像时将其去掉；

5 令 $j=j+1$，重复2、3、4步骤，直到 $j=J$ 为止，J 为最大分解尺度。

2.2 相邻尺度间相位比较

另外一种相位去噪的思想是基于尺度之间的。图像与噪声在小波变换下随尺度变化的传递特性不同，这种差异不仅表现在幅值上，而且也表现在相位上。图像的真正边缘对应的相位值在相邻两尺度间具有很强的相关性，上一尺度上的相位信息较完整地传递给下一尺度；而对于噪声来讲，它所对应的相位值不存在上述特性。这是相邻尺度间相位去噪的基本依据。具体方法为：

1 取 $j=1$，计算图像的小波变换相位 $A_{2^j}f(x,y)$；

2 选择一窗宽 M_j；

3 计算小波相位 $A_{2^{j+1}}f(x+k,y+l)$，其中 $k,l=-M_{j+1},-M_{j+1}+1,\cdots,0,\cdots,M_{j+1}$；

4 如果对于每一点 $(x+k,y+l)$，都有 $|A_{2^{j+1}}f(x+k,y+l)-A_{2^j}f(x,y)|>\delta_j$，($\delta_j$ 为一阈值)，则 (x,y) 被认为是噪声边缘，重构图像时剔除掉该点的边缘信息；

5 令 $j=j+1$，重复2、3、4步骤，直到 $j=J$ 为止，J 为最大分解尺度。

3 试验结果与结论

设大小为 $M\times N$ 的原始图像为 $f(x,y)$，简记为 f，经过 Gaussian 噪声污染之后的图像为 $f'(x,y)$，简记为 f'，则含噪图像的信噪比定义为

$$SNR=10\log_{10}\left[\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{N}(f-\bar{f})^2/\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{N}(f-f')^2\right] \tag{10}$$

其中 $\bar{f}$ 表示图像 $f(x,y)$ 的均值。该图像的均方差为

$$MSE=\frac{1}{MN}\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{N}(f-f')^2 \tag{11}$$

对于图像来讲，另外一种较常用的峰值信噪比定义为

$$PSNR=10\log_{10}[255^2/MSE] \tag{12}$$

我们利用上述基于小波变换相位特性的滤波算法对一含有 Gaussian 噪声的 Lenna 图像进行了去噪试验，结果如图1所示，其中(a)为256×256的原始 Lenna 图像，(b)为含 Gaussian 噪声的 Lenna 图像，信噪比为6.0559dB，(c)为用本文方法去噪之后的图像，信噪比提高到13.5592dB，信噪比增益高达7.5033dB。本文试验的数值结果和视觉效果都非常好。

(a) 原始 Lenna 图像　(b) 加 Gaussian 噪声的图像　(c) 去噪之后的 Lenna 图像

图1　Lenna 图像的去噪结果

小波变换多尺度分解的思想在信号与图像去噪中有着重要的应用。由于信号与噪声的幅值在小波变换下有不同的传播特性，因此大多数去噪算法都是基于小波系数的幅值特性。然而对于信噪比 SNR 较低的图像来讲，在小尺度的小波变换域内，图像的真实信息往往被噪声所淹没[1]。因此本文研究了信号与噪声的相位在小波变换下的不同特性，然后提出一种对幅度不敏感的小波相位滤波算法，该算法适于强噪声的去除。从本文的试验结果可以看出，该算法不仅有效，而且较以往的方法体现了极大的优越性。

参 考 文 献

1 Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-domain filtering for photon imaging systems. IEEE Trans. on IP., 1999, 8(5): 666～678
2 Donoho D L. De-noising by soft-thresholding. IEEE Trans. on IT, 1995, 41(3): 613～627
3 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadephia: SIAM, 1992
4 Mallat S, Zhong S. Characterization of signals from multiscale edges. IEEE Trans. on PAMI, 1992, 14(7): 710～732
5 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. IEEE Trans. on IP, 2000, 9(9): 1522～1531
6 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. IEEE Trans. on IP, 2000, 9(9): 1532～1546
7 赵瑞珍，宋国乡．一种基于小波变换的白噪声消噪方法的改进．西安电子科技大学学报，2000，27(5)：619～622
8 许雷，郑筱祥，陈兴灿．一种基于小波相位滤波及视觉非线性的医学图像自适应增强新方法．电子学报，1999，27(9)：121～123

(上接第32页)

8 赵德斌，陈耀强，高文．基于块方向预测和 Context 的图像无失真编码方法．软件学报，1998，9(10)
9 Speck D. Proposal for Next Generation Lossless Compression of Continuous-tone Still Pictures: Activity Level Classification Model (ALCM). ISO Working Document ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 N198, 1995
10 Ueno I, Ono F. CLARA: Continuous-tone Lossless Coding with Edge Analysis and Range Amplitude Detection. ISO Working Document ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 N197, 1995
11 Gandhi B, Honsinger C, et al. A Proposal Submitted in Response to Call for Contributions for JTC 1. ISO Working Document ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 N204, 1995
12 Rissanen J, Langdon G. Universal Modeling and Coding. IEEE Trans. Inform. Theory, 1981, IT-27: 12～22
13 Todd S, Langdon G, Rissanen J. Parameter Reduction and Context Selection for Compression of Grayscale Images. IBM J. Res. Develop., 1985, 29: 188～193
14 可通过下述方式获得：ftp://links.uwaterloo.ca:/pub/bragzone. http://links.uwaterloo.ca/bragzone.base.html