

# 基于小波变换的图像的多分辨率分解与重构的实现<sup>\*</sup>

Implementation of Multiresolution Decomposition and Reconstruction of Image Based on Wavelet Transform

骆正虎 杨敬安 吴刚

(合肥工业大学 A126信箱 合肥230009)

**Abstract** This paper presents a novel multiresolution image decomposition and reconstruction method based on wavelet transform. According to this method image is decomposed and transmitted in a coarse-to-fine way. The receiver could reconstruct finer and finer image during the course of image receiving and obtain the original image finally. The experimental results show that this method could be applied to both intensity images and color images. Its computation complexity is low and it could solve the limited bandwidth problem. This method could also compress image data thanks to the advantages of wavelet transform.

**Keywords** Wavelet transform, Multiresolution analysis, Image decomposition, Reconstruction

## 1. 引言

小波理论的出现吸引了许多领域的学者对之进行深入的研究。小波变换是一种信号的时间-尺度(时间-频率)分析方法,它具有多分辨率分析的特点,在时频两域都具有表征信号局部特征的能力,而且,小波变换的多尺度分解特性更加符合人类的视觉机制,与图像处理 and 计算机视觉中由粗到细的认识过程十分相似,更加适合于图像信息的处理。目前,小波理论已在某些信号处理领域和计算机视觉得到了成功的应用<sup>[1-4]</sup>。

在现代多媒体通信中,网络传输常常受到带宽的限制,因此传输较大幅图像往往需要很长时间,有时甚至由于随机的传输错误而导致图像无法正常显示。针对这一问题,本文提出一种基于小波变换的多分辨率解决方法。利用该方法可先对图像进行小波变换及摘编码,将粗精度的图像概貌信息传输至接收方并重构、显示出来,然后将图像的细节信息按照分辨率由低到高的顺序逐级传输出去,这样接收方就能在接收过程中逐级重构出精度不断提高的图像并最终再现出不失真的原始图像。该方法有以下三个优点:一是接收方在

接收过程中能够看到精度不断提高的图像,而不象传统方案中只有等到全部信息接收完毕才能显示出图像;二是当带宽受限制时,也可以只传输部分信息,这样接收方可以重构出精度达到某一级别的图像并对所传输场景有一大致的了解,而不至于像传统方案那样根本无法显示出图像从而对所传输场景一无所知;三是由于小变换自身的优点,该方法还能压缩图像数据,减少待传输的数据量,减轻网络的负担。

## 2. 多分辨率分析

图1示出离散小波变换的基本算法<sup>[2]</sup>。一离散信号  $S$  经高通滤波器  $\tilde{g}$  和低通滤波器  $\tilde{h}$  滤波后向下采样,其结果为一高频信号  $HP$  和一低频信号  $LP$ ,各自包含的采样点数是输入信号  $S$  的一半。

对于逆变换,首先通过向高频信号  $HP$  和低频信号  $LP$  各相邻点之间插入0来实现向上采样。然后这两个信号分别经滤波器  $g$  和  $h$  滤波,再把结果相加。对于完全重构的情形而言,最终信号与原始信号  $S$  完全相同。

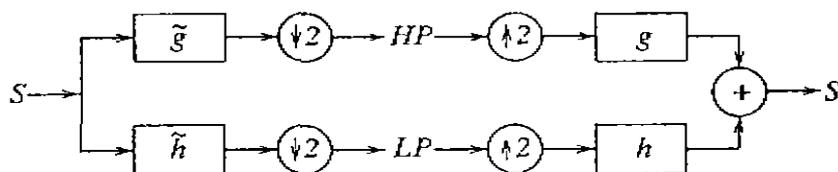


图1 离散小波变换的基本算法

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助课题,编号:69585002、69785003。骆正虎 博士研究生,研究方向是小波分析,图像处理、多媒体通信。杨敬安 教授,博士生导师,研究方向是计算机视觉、人工智能、模式识别。吴刚 博士研究生,研究方向是计算机视觉、图像处理、人工智能。

当  $g, \tilde{h}, \tilde{g}$  和  $\tilde{h}$  满足一定条件时被称为小波滤波器,  $\tilde{g}$  和  $\tilde{h}$  分别被称为  $g$  和  $h$  的对偶滤波器。

信号  $LP$  能反映出原始信号  $S$  的基本波形, 它是信号  $S$  在低一级分辨率上的表示; 而另一方面,  $HP$  则包含着由高分辨率变换到低分辨率所丢失的细节信息<sup>[2]</sup>。

如果输出的低频信号被当作新的信号输入到同一滤波器组, 再次进行离散小波变换, 并且如此循环若干次, 最终会得到频率很低的信号以及不同分辨率上的细节信息, 这一过程示于图2, 其中  $V_n$  表示第  $n$  级分辨率上的低频信号,  $W_n$  表示从第  $n+1$  级分辨率变换到第  $n$  级分辨率所丢失的高频信息, 这就是著名的 Mallat 塔式算法。

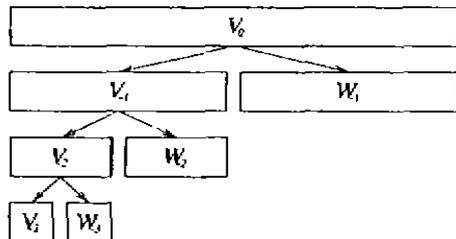


图2 小波变换的分解树

使用离散小波变换可以将输入信号压缩为有限的一些较大幅度的系数, 这一压缩能力来源于小波函数的“消失矩”特性, 它可以确保输入的低阶多项式信号的小波系数为  $O(\epsilon^k)$ , 因此, 如果一个信号本身即为多项式, 那么它就可由尺度系数完全描述而无需小波系数。实际应用中, 输入信号不一定是多项式, 但一般可由分段多项式函数来近似表示。因为小波函数有紧支集, 所以除了那些对应于支集在多项式分段区间附近的小波函数的系数外, 输入信号的大部分小波系数将为0。

### 3. 由粗到细的图像重构方法

给定  $L \times L$  的灰度图像  $f(x, y)$ , 首先假定  $L$  为2的正整数次幂, 即  $L = 2^n, n$  为正整数。可以认为原始图像处于最高分辨率空间  $V_n$  里, 然后对  $f(x, y)$  进行  $n$  级小波变换, 把图像变换到最低分辨率空间  $V_0$  里, 而  $V_0$  的基底只有一个元素, 即  $\phi_{0,0}$ , 这样  $f(x, y)$  就展开为:

$$f = \lambda_{0,0} \phi_{0,0} + \sum_{j,t} \gamma_{j,t} \Psi_{j,t} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_{0,0} &= \langle f, \phi_{0,0} \rangle \\ \gamma_{j,t} &= \langle f, \Psi_{j,t} \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

对所有系数  $\lambda_{0,0}, \gamma_{j,t} (0 < j < n)$  进行 Huffman 编码, 然后将编码后的系数按照如下顺序写入一个文件: 先写入  $f(x, y)$  在最低分辨率空间  $V_0$  里的展开系数  $\lambda_{0,0}$ , 接着写入  $f(x, y)$  在小波空间  $W_1$  里的3个展开系数  $\gamma_{1,t}$ , 然后写入  $f(x, y)$  在小波空间  $W_2$  里的12个展开

系数  $\gamma_{2,t}$ , 按照如此顺序直至写入  $f(x, y)$  在小波空间  $W_{n-1}$  里的  $3 \cdot 2^n$  个展开系数  $\gamma_{n-1,t}$ , 最后发送方将此文件逐字节发送到接收方。由于小波变换具有数据压缩的能力, 所以用较少的系数就可完全描述原始图像信息, 加之又进行了 Huffman 编码, 所以待传输的文件要比原始图像文件小得多。

接收方所接收的第一个系数即为  $\lambda_{0,0}$ , 其次的3个系数为  $\gamma_{1,t}$ , 根据这4个系数进行小波逆变换, 这样在接收方就重构出了分辨率最低的图像:

$$f_1 = \lambda_{0,0} \phi_{0,0} + \sum_{t=0}^2 \gamma_{1,t} \Psi_{1,t} \quad (3)$$

这是原始图像  $f(x, y)$  在最低分辨率空间的表示, 也是对原始图像最粗糙的近似。

其后接收方所接收的是  $f(x, y)$  在小波空间  $W_2$  里的12个展开系数  $\gamma_{2,t}$ , 根据此前所接收的4个系数以及这12个系数进行两级小波逆变换, 即可得到次低分辨率的图像:

$$f_2 = \lambda_{0,0} \phi_{0,0} + \sum_{t=0}^2 \gamma_{1,t} \Psi_{1,t} + \sum_{t=0}^{11} \gamma_{2,t} \Psi_{2,t} \quad (4)$$

如此一边接收数据一边重构图像, 使得重构出的图像的精度不断提高, 直至接收到最后一批  $3 \cdot 2^n$  个系数  $\gamma_{n-1,t}$ , 结合前面所接收的数据进行第  $n$  级小波逆变换:

$$f_n = \lambda_{0,0} \phi_{0,0} + \sum_{t=0}^2 \gamma_{1,t} \Psi_{1,t} + \sum_{t=0}^{11} \gamma_{2,t} \Psi_{2,t} + \dots + \sum_{t=0}^{3 \cdot 2^{n-1}-1} \gamma_{n-1,t} \Psi_{n-1,t} \quad (5)$$

此  $f_n$  是对原始图像  $f(x, y)$  的精确重构, 完全不失真地再现了原始图像。

如果在传输过程中发生传输错误或网络堵塞, 接收方也已经重构出了达到一定精度级别的图像, 已大致了解所传输图像的内容, 而不至于一无所知。

如果待发送的原始图像  $f(x, y)$  的尺寸为  $N \times M$ , 其中  $N$  和  $M$  均不为2的整数次幂, 则可在图像的边界处进行延拓, 使图像的大小变为  $L \times L$ , 其中  $L$  为不小于  $N$  和  $M$  的最小的2的整数次幂, 此后的发送、接收过程完全同上, 最后重构出图像以后保留左上角的  $N \times M$  的子图像即可。

对于彩色图像而言, 需对图像的 RGB 分量分别进行变换, 存储文件时属于同一分辨率空间的各彩色分量系数排列在一起, 即排列顺序为:

$$\lambda_{0,0}^R, \lambda_{0,0}^G, \lambda_{0,0}^B, \gamma_{1,0}^R, \gamma_{1,0}^G, \gamma_{1,0}^B, \gamma_{1,1}^R, \gamma_{1,1}^G, \gamma_{1,1}^B, \gamma_{1,2}^R, \gamma_{1,2}^G, \gamma_{1,2}^B, \dots, \gamma_{n-1,0}^R, \dots, \gamma_{n-1,3 \cdot 2^{n-1}-1}^R, \gamma_{n-1,0}^G, \dots, \gamma_{n-1,3 \cdot 2^{n-1}-1}^G, \gamma_{n-1,0}^B, \dots, \gamma_{n-1,3 \cdot 2^{n-1}-1}^B$$

接收方在进行每一级小波逆变换时都分别为 RGB 三个彩色分量进行一次逆变换, 并由三个彩色分量合成一幅当前分辨率的彩色图像, 如此反复, 最终即可完全重构出原始彩色图像。

### 4. 实验结果

图3是一幅  $256 \times 256$  像素的原始灰度图像 camera-

man。

首先对该图像连续进行8级双正交小波变换<sup>[5]</sup>,将所得系数进行 Huffman 编码后按分辨率由低到高的顺序写入文件,再传送至接收方,接收方一边接收数据

一边进行 Huffman 解码及小波逆变换,最终完全不失真地再现了原始图像。

图4示出接收方由粗到细地重构出原始图像的全过程。



图3 原始图像 cameraman

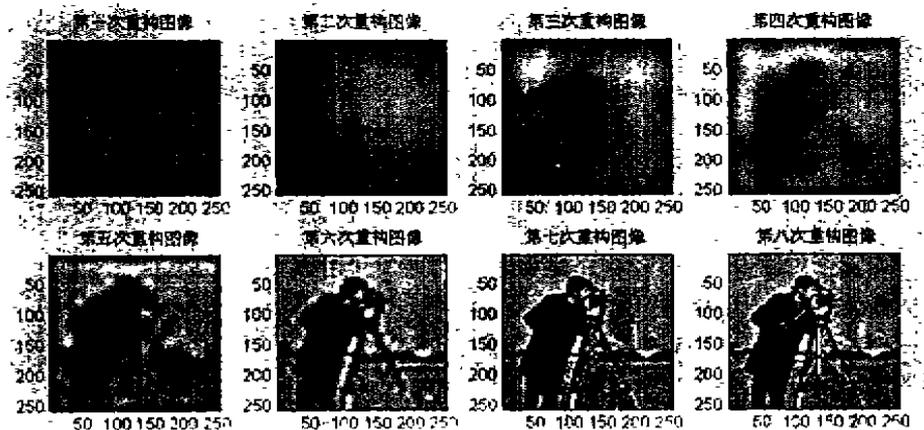


图4 由粗到细地重构图像的全过程

**结论** 针对多媒体通信中带宽受限的问题,本文提出一种基于小波变换的由粗到细的图像重构的新方法:对原始图像进行若干级小波变换,再将变换系数按分辨率级别由低到高的顺序传输给接收方,接收方则可一边接收数据一边进行小波逆变换以由粗到细地重构图像直至最终完全不失真地再现出原始图像。此外,小波变换的特性还赋予该方法压缩图像数据的能力,大大减少了待传输的数据量,从另一方面解决了网络带宽受限的问题。实验结果表明该方法简单易行,适用性强,运算速度快,计算过程清晰,是一种行之有效的图像重构的新方法。

### 参考文献

1 Yang J A, Yang X M. A novel approach to image enhancement based on wavelet transform. IEEE Signal Processing Letter, in press

2 Jawerth B, Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analyses. SIAM Rev., 1994, 36(3): 377~412  
 3 杨敬安. 基于 Gabor 小波模型图像配准的计算视觉新方法. 合肥工业大学学报, 1999, 22(1): 8~13  
 4 Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., 1989, 11(7): 674~693  
 5 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. New York, SIAM, 1992  
 6 Cohen A, Daubechies I, Feauvean J. Bi-orthogonal based of compactly supported splines and wavelets. J. Approx. Theory, 1992, 71(3): 263~304  
 7 胡昌华, 张军波. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——小波分析. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1999  
 8 许刚. 复小波在图像编码中的应用. 软件学报, 1999, 10(3): 293~298  
 9 郭田德, 高自友. 改进的静态图像零树编码算法. 计算机学报, 1999, 22(7): 692~697