维普资讯 http://www.cqvip.com

分形插值函数反问题的小波解法

Solving the Inverse Problem of Fractal Interpolation Function Using Wavelet Analysis

侯建荣　刘宣会　宋国乡

（西安电子科技大学应用数学系　西安710071）

Abstract Given a graph of a fractal interpolation function f which is the attractor of an unknown IFS with affine constration maps $w_1, w_2, \cdots, w_N$, the maps $w_i (i=1,2,\cdots,N)$ are found based on the self-similarity of the zero-crossing points of wavelet transform. The effectiveness of method is shown in an example.

Keywords Inverse problem, Fractal interpolation function, Wavelet transform

一、引言

分形理论研究中的前沿课题之一是分形反演问题：给定紧集 A，找一个迭代函数系统 IFS（Iterated Function System）以 A 作为吸引子。反问题在信号压缩技术中有着非常重要的作用，假如可以对给定吸引子加以计算，则用有限个少量的压缩变换可以决定高度复杂的精细结构，这样复杂的图像便可以有效地进行编码储存和传输。整个图形集就可以用有限个映射进行编码。M F. Barnsley[1]早在1988年就利用一类设定的迭代函数系统来逼近分形的不变性，开创了反问题研究的先河，其方法并不是对分形本身所具有的真实不变性进行分析。A. Arneodo 等人[2]利用小波变换和拼贴定理在对角向集 DLA 的研究中取得了成功，实现了反问题领域中的一次真正突破，仅仅对一维饼格分形进行了具体研究。以后 Forte. B 等人[3]则用迭代函数系统来解决逼近函数图像的反问题，这种逼近方法在一些分形图像压缩方面[4]发挥了作用。由于这种逼近的映射数目和原始映射不同，即使是一个简单吸引子，上述方法也不会找到实际正确的。另外，值得一提的是，李后强等人[5]则从小波变换最极大值入手，对解决分形反演问题进行了一次成功的尝试。本文作者认为，分形插值函数是定义于紧区间上的自仿射函数，是IFS的唯一吸引子，是产生分形图像的重要构造方法。在事先不知道映射的数目和参数的情况下，本文将采用小波变换保相似性特征为分形插值函数寻找相应迭代函数系统的映射。

二、分形插值函数

设 $H(X)$为完备空间 X 的一个非空紧支集集合，附加一个 Hausdoff 测度，空间$(H(X),dH)$即为完备的测度空间。取 $D\in H(\mathscr{R})$，考虑映射 $w_i(i=1,2,\cdots,N)$：$[0,1]\times D\to[0,1]\times D$。

$$w_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=w_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i & 0\\ \beta_i & \gamma_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_i\\ \theta_i\end{pmatrix}$$

$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\varepsilon_i,\theta_i\in\mathscr{R},0<\alpha_i<1,0<|\gamma_i|<1$$

令 $P_1=(0,y_1)$为 w_1的不动点，$P_{N+1}=(1,y_{N+1})$为 w_N 的不动点，选择参数使得 $w_i(P_{N+1})=w_{i+1}(P_1)$，对一切 $i=1,2,\cdots,N-1$均成立。且 $w_1(P_1),w_2(P_1),\cdots,w_N(P_1)$不全共线。这样可保证$[W_i(P_1),w_i(P_{N+1})]$形成一非平凡多边形曲线。另外 α_i,γ_i 的选择要确保映射 w_i 对于某一度量来说是压缩映射。

这样迭代函数系统$\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$的吸引子就是一个无处可微的连续函数，f 的图形函数就是过插值点 $w_1(P_1),w_2(P_1),\cdots,w_N(P_1),P_{N+1}$的分形插值函数。

$$f\in[0,1]\quad H:C[0,1]\to C[0,1]$$

$$(Hf)(x)=\beta_i l_i^{-1}(x)+\gamma_i f(l_i^{-1}(x))+\theta_i,$$

$$l_i(x)=w_{x_i}(x,y),$$

$$w_i(P_1)=P_i=(x_i,y_i),\forall\ x\in[x_{i-1},x_i]$$

设 f_0是具有插值点 $P_1,P_2,\cdots,P_{N+1}$的点态线性函数，则 $f_{n+1}(x)=(Hf_n)(x)\to f,(n\to\infty)$。$f$ 是 H 的不动点，即分形插值函数可以看成一函数列的一致收敛极限函数。

三、小波零点自相似特征讨论

设小波函数 φ是一个 $n+1$次可微且紧支于$[-K,K]$光滑可微函数$(n\geq2)$的 k 次导数，f 是一分形插值

侯建荣　博士生，研究方向为小波理论及其应用，信号处理。宋国乡　教授，博士导师，研究方向为小波理论分析，数值分析。

维普资讯 http://www.cqvip.com

函数。定义 f 在 φ 下的小波变换为：

$$W_\varphi[f](b,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)f(x)dx$$

则 $W_\varphi[f](b,a)=0,\frac{\partial W_\varphi}{\partial b}(b,a)=-\frac{1}{a}W_\varphi(b,a)$ 等价于下述两个等式：

$$W_\varphi[f](\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=0,$$

$$\frac{\partial W_\varphi[f]}{\partial b}(\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=-\frac{1}{a}W_\varphi[f](\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=0$$

定义 A 为满足上述两式的零元素 (b,a) 的集合。对上述 φ，若 φ 具 $k+1$ 阶消失距 $(k\geqslant 2)$，那么就可以得到小波变换零点的自相似性。任取 $(b,a)\in\mathscr{R}\times\mathscr{R}_+$ 使得 $(-aK+b,aK+b)\subset[0,1]$，则有

$$W_\varphi[f](b,a)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\varphi[f](\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a),i=1,2,\cdots,N$$

证明：

$$W_\varphi[f](b,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-aK+b}^{aK+b}\varphi\left(\frac{z-b}{a}\right)f(z)dz$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\varphi\left(\frac{l_i^{-1}(x)-b}{a}\right)f(l_i^{-1}(x))dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\varphi\left(\frac{x-(\alpha_i b-\varepsilon_i)}{\alpha_i a}\right)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\varphi[f](\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)$$

四、分形插值函数反问题的解及算法

设 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$ 是一个带有参数 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\varepsilon_i,\theta_i$ 的一迭代函数系统，f 为相对应的分形插值函数，同时取 $(b,a)\in A$，则存在点 $(b_i,a_i)\in A,i=1,2,\cdots,N$，使得下列等式成立：

$$a_i=\alpha_i a \tag{3.1}$$

$$b_i=\alpha_i b+\varepsilon_i \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1 \tag{3.3}$$

$$\alpha_i+\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1} \tag{3.4}$$

同时有递推式：$(b_i^{(j)},a_i^j)\in A$，且 $b_i^j=\alpha_i b_i^{j-1}+\varepsilon_i,a_i^j=\alpha_i a_i^j,j=2,3,\cdots$

利用以上这些特性，可给一个分形插值函数图形编码，从而得到最小数目的仿射映射 $w_1,w_2,\cdots,w_N$。

步骤1：由 $(b^0,a^0)\in A$，知 $a^0=\max\{a\in\mathscr{R}_+|\exists b,(b,a)\in A\}$

步骤2：继续从尺度 a^0 到下一尺度 a_i^0 产生点 $(b_i^1,a_i^1)\in A$

步骤3：由计算(3.1)、(3.2)参数 α_i,ε_i 并检查是否符合(3.3)、(3.4)条件。然后由 f 在 X 轴不共线的三个值解方程，可求出 $\beta_i,\gamma_i,\theta_i$ 的值

步骤4：必要时进行下一尺度计算，重复以上步骤。

该方法的特点是在所选尺度上利用较少量的小波变换零交叉点来构造出分形插值函数的图形。

五、举例

选取一个二次光滑样条函数作为尺度函数 $\phi(x)$ 来构造小波函数 $\phi(x)$

$$\phi(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -2x^2=6x-3 & 1<x\leqslant 2\\ (3-x)^2 & 2<x\leqslant 3\\ 0 & 其它\end{cases}$$

给出一族仿射映射 $W=\{w_1,w_2\}$

$$w_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\50 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\-30 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$$

经由小波变换零点计算出的参数如下表所示：

I	α_i	β_i	γ_i	ε_i	θ_i
1	0.331	48.51	0.52	0.00	0.00
2	0.331	−32.12	0.24	0.65	38.96

可以看出由零点计算出的映射能够较好地逼近所给分形插值函数。

结论 研究了分形插值函数零点及自相似特性，从由所选小波变换零交叉点组成的有限子集出发，构造出相对应的仿射变换，这种算法可以找到仿射映射的正确数目。

参考文献

1 Barnsley M F. Fractals Everywhere. Academic Press, Orlando, 1988

2 Arneodo A, Bacry E, Muzy J F. Solving the Inverse Fractal Problem from wavelet analysis. Europhysics Letters, 1995, 25(7): 484～497

3 Forte B, Vrscay E. Solving the Inverse Problem for Function Approximation using Iterated Function Systems. Fractals, 1994, 2(3): 325～346

4 Fisher Y. Fractal Image Compression, Theory and Appolication. Springer-Verlag, New York, 1994

5 朱治军，李后强. 用小波分析进行分形反演的理论研究，非线性科学的理论、方法和应用. 科学出版社，1997