

支持与证据的形式化研究

The Formal Discussion on Support and Evidences

陈国祯 徐贯东 王 咏

(温州师范学院计算机科学系 温州325003)

摘 要 关于不确定推理,从概率模型、可信度理论发展到证据理论和模糊推理,大大丰富了不确定推理的理论,在专家系统中的应用也日趋成熟。所有这些研究都是基于“一定意义”下的数值度量来研究证据与结论之间的关系,因而可以提出这样的问题,在非确定环境下,证据和证据对结论的支持强度的普遍含义是什么?这就涉及到支持和证据的逻辑基础问题,作者在文[1]提出了支持逻辑和证据的初步概念,本文探讨了事态的形式化并且对支持逻辑和证据作了进一步说明和解释,对整个形式化方案作了肯定的说明。

关键词 支持逻辑,证据的形式定义

一、事态的符号化

原子事态是指我们思考中的原子对象,或者说是逻辑世界中设想的对象。它可以是现实世界中我们思考的事件的状态(如吸烟),那么,在现实世界中,它必然是出现(即事态本身)或者不出现,即事态未发生(也是一种事态!)。在现实世界中出现的事态叫事实,因而事态出现与未出现均是事实,在事态分析中常将这两种事实加以对比。事态不同于命题,如吸烟与“雪是白的”明显的区别是,后者没有对比的事实“雪不是白的”,因而,我们可以设想一个原子事态它只有两个可能状态,即该事态发生(即事态本身)或者该事态不发生,这种发生不是指现实世界中的出现,而是设想的可能世界中的发生与不发生,为此,我们假定原子事态的基本假设,每一原子事态有:

(1)在任何时候、任何场合,该事态都可能发生,也可能不发生;

(2)在任何时候、任何场合,该事态或者发生或者不发生、必居其一;

(3)在任何时候、任何场合,该事态既发生又不发生是不可能发生的。

独立性假设如下:

(1)当谈论某些原子事态时,与其它原子事态的发生与否无关;

(2)所论及的原子事态仅与所论及的原子事态所组成的世界(言说中的世界)有关;

(3)言说中的世界中,各原子事态之间是互相独立的,即任一原子事态的发生与否与其它原子事态的发生与否无关,

分子事态定义如下:

〈原子事态符号〉: $= a|b|c|e|d|a_1|a_2|\dots$

〈事态联结词〉: $= \sim|\&|or$

〈圆括号〉: $= (|)$

〈事态表达式〉: $= \langle \text{原子事态符号} \rangle | (\sim \langle \text{事态表达式} \rangle) | | (\langle \text{事态表达式} \rangle \& \langle \text{事态表达式} \rangle) | | (\langle \text{事态表达式} \rangle or \langle \text{事态表达式} \rangle) |$

注1)规定事态联结词的先后顺序为 $\sim, \&, or$ 圆括号的简化规则与命题逻辑定同,事态表达式亦称分子事态。

注2) $\sim$ 作为“不是”的符号, $\&$ 作“而且”符号, or 作“或”的符号。

1.1 原子事态的符号化

我们规定:(1)原子事态符号表达我们设想的原子事态;(2)任一原子事态,如 a ,由 a 发生的状态就是原子事态 a 本身,所以规定 a 就表示“ a 发生的状态”(简称 a 发生), $\sim a$ 表示 a 不发生的状态,在只有一个原子事态 a 组成的世界 $[a]$ 中:(i) a 及 $\sim a$ 都是 $[a]$ 的可能事态;(ii)在任何时候任何场合, a 或 $\sim a$ 必有一个发生;(iii)在任何时候任何场合, $a \& \sim a$ 是不可能发生的,这就是原子事态的基本假设。

1.2 可能世界与基本事态

世界是所讨论的原子事态的总和,或者说世界是由所论及的原子事态组成的,这里我们所说的世界是指言说的世界。

若世界是由 n 个原子事态 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的,则世界可记为 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 或简记 Ω 或 $W(\Omega)$ 。

组成世界的原子事态的发生与否决定了世界的可能状态,称为可能事态,世界上 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 上共有 2^n 个可能事态,可能事态亦称基本事态。

可能世界记为 $Wp(\Omega)$,它是所有基本事态的总和,它们组成一个互斥的完备组。

每一个基本事态可以看作是对世界 Ω 的一种可能状态的描述,可能世界 $W_p(\Omega)$ 就是对世界的所有可能状态的描述,可能世界可表示为:

$$W_p(\Omega) = \{X_1 \& X_2 \& \dots \& X_n | X_i \in \{a_i, \dots, a_i\}\}$$

1.3 变形规则

到目前为止,我们还没提及到事态表达式的意义。仅就原子事态给予了说明,指出论域世界的状态可以用原子事态的状态来描述。我们将要指出事态表达式就是对本身的论域世界 $D(P)$ 的描述。

我们用 p, q, r 等表示任一事态表达式,对任一表达式 p 我们把它解释为“ p 发生时所表示的状态”,我们用 $H: \dots$ 发生。根据语句 $H(p)$ 及 $\sim$ /非, $\&$ /且, $\vee$ /或,有:

$$H(p \& q) = H(p) \& H(q)$$

$$H(p \vee q) = H(p) \vee H(q) \vee H(\sim p) \vee H(q) \vee H(p) \vee H(\sim q) \quad (0)$$

$$\sim H(\sim p \& q) = H(p) \vee H(q) \vee H(\sim p) \vee H(q) \vee H(p) \vee H(\sim q)$$

按照规定 $a = H(a)$, $\sim a = \sim H(a)$, 上面的定义就成了:

$$p \& q = p \& q$$

$$p \vee q = p \vee q$$

$$\sim(\sim p \& \sim q) = p \vee q \vee \sim p \vee q \vee p \vee \sim q$$

(0)式的规则消失了,所以我们把它叫做隐含规则,这时 $p \& q$ 既意味着 $p \& q$ 发生,也意味着 p 发生且 q 发生,这就产生描述的混淆,因为它们都是描述同样的事态,为了书写的简单,我们允许这种混淆,一般有:

$$\sim \sim p = p \quad (1)$$

$$p \& p = p, p \vee p = p \quad (2)$$

$$p \& q = q \& p, p \vee q = q \vee p \quad (3)$$

$$p \& (q \& r) = (p \& q) \& r, p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r \quad (4)$$

$$p \& (q \vee r) = p \& q \vee p \& r \quad (5)$$

$$\sim(p \& q) = \sim p \vee \sim q \quad \sim(p \vee q) = \sim p \& \sim q \quad (6)$$

另外还有一个重要的原则— ϕ 消去原则,按照基本假设,任一原子事态 $a, a \& \sim a$ 是不可能发生的,因而 $(a \& \sim a) \& p$ 也是不可能事态,若在一个事态表达的部份表达式出现这样情况,则可将此项略去,因为它不表达任何可能事态,这里等号意味两端给出的是世界的相同描述。

这里的公式从形式上看与命题逻辑的等值式相同,因为事态表达式(或分子事态)不是真值函数而是事态描述即发生时所表达的事态。正因为如此,命题逻辑的另一些公式如吸收律等都是不允许的,因为这样变形可能扩展论域,这是我们的逻辑所不允许的。

1.4 事态与范式

任何一个分子事态 p , 如果它不是矛盾的(或不可

能发生的),则同命题逻辑中一样,用前面的变形规则可将 p 化为范式,即论域世界中的基本事态的析取(或联结),用 $B(p)$ 表示 p 的这些事态的集合,则

$$P = \bigvee_{\theta \in B(p)} \theta$$

这就意味着 p 发生就等于说“ θ_1 发生或 θ_2 发生或 $\dots \theta_n$ 发生”,即一个事态表达式或分子表达式就是以这样的形式去描述论域世界的状态的,其中每一个 θ_i 都是对世界的描述。

若 p 描述了论域世界的所有可能状态,则我们说 p 是恒发生的,我们关心的是那些既不是不可能发生,也不是恒发生的那些分子事态,我们把这样的分子事态就叫做事态,它就是我们研究的对象。

二、支持逻辑

在讨论一些事态对结论的支持时,总是假定结论是某个特定的事态,它不同于我们所讨论的那些事态,而与那些事态有着内在联系,那就是支持关系。这种支持关系可以表述为“事态 p 对 h 的支持比事态 q 对 h 的支持更强”或者说“事态 p 比事态 q 对 h 的支持更强”。其符号形式又表示成 $pSq[h]$, 其中要求 $p \neq q$, $p \& q \neq p, q$, 这是更强支持的必然要求。我们把 $pSq[h]$ 叫基本支持表达式,分子支持表达式,可以像命题逻辑那样由逻辑联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 构成。

支持逻辑由五个公理组成,它们是:

$$\text{公理1} \quad pSq[h] \rightarrow \neg qSp[h]$$

$$\text{公理2} \quad pSq[h] \wedge qSr[h] \rightarrow pSr[h]$$

公理2表明更强支持具有传递关系。即是说如果 p 比 q 更强支持 h 而 q 又比 r 更强支持 h , 那么, 事态 p 就比事态 r 更强支持 h , 这两个公理刻画了更强支持的顺序关系。

$$\text{公理3} \quad pSq[h] \rightarrow \bigwedge_{\substack{r \in B(p \& \sim q) \\ r \in B(\sim p \& q)}} rSr[h]$$

这个公理意味着: 事态 p 比事态 q 更强支持 h 等于说 p 发生而 q 不发生的任一基本事态比 p 不发生而 q 发生的任一基本事态支持 h 都更强。由此可得

$$\text{定理1} \quad pSq[h] \leftrightarrow p \& \sim qSq \& \sim p[h]$$

$$\text{特例} \quad aSb[h] \leftrightarrow a \& \sim bSb \& \sim a[h]$$

从特例看出, 说 a 发生比 b 发生支持 h 更强等于说 a 发生而 b 不发生比 b 发生而 a 不发生支持 h 更强。这里, 我们举一个“吸烟比饮酒更强支持得肺癌”的实例, 用通俗的话来说就是“说吸烟比饮酒更易得肺癌就等于说吸烟不饮酒比饮酒不吸烟更易得肺癌”。所以, 我们说这一公理是具有实质性的。

$$\text{公理4} \quad pSq[h] \leftrightarrow qSp[\sim h]$$

公理表明: 事态 p 比事态 q 更强地支持了 h 发生就等于说 q 发生比 p 发生更强地支持了 h 不发生。以上面的实例来说就是“说吸烟比饮酒更易得肺癌就等于说饮酒比吸烟更不易得肺癌”。

公理5 $pSq[h] \leftrightarrow p\delta rSq\delta r[h] \wedge p\delta \sim rSq\delta \sim r[h]$

其中 $D(r) \cap (D(p) \cup D(q)) = \emptyset$ 。

公式表明支持表达式 $pSq[h]$ 与其它事态的关系,那就是不管世界本身事态如何,只要 p, q 两个事态之外情况相同均成立,所以,我们说它是无条件的,即是说事态 p 支持 h 比事态 q 支持更强这一性质。不因论域之外的事态 r 发生或不发生而改变,因而,说我们的支持逻辑是无条件支持逻辑。

公理系统给出了支持逻辑的基本原则,公理1及公理2给出了支持关系的顺序原则,公理3给出了世界上的支持表达式的可能事态析取的合取分配原则,有了这个原则任何一个支持表达式可以表达为原子支持式的真值函项,公理5还给出了论域世界的扩展原则,正是这一要求,限制了在2节关于事态变形规则的某些情况,而那些情况恰好可能改变论域世界,如果一个支持表达式表达为它的原子支持式的重言式称为 s -重言式,系统中的定理就是 s -重言式,而公理4给出了关于结论发生的可能世界的支持关系与结论不发生的可能世界支持关系是互逆的。

三、关于证据的理论

什么是证据?正是本文想要回答的主要问题,我们不是用语义的方法以一定的数值去表征证据的要领而是用形式化的方法去建立证据的概念,从而提示证据的普遍的特征。

上节提出的支持逻辑方案为刻画证据概念提供了理论基础,证据是对某一结论 h 我们可以定义它的正证据和负证据的概念,我们说事态 p 不发生更强地支持 h ,即 $ps \sim p[h]$ 为真,类似,事态 p 是 h 的正证据(简称证据)是指:事态 $\sim p\delta p[h]$ 为真,用 $PE(p, h)$ 表示 p 是 h 的证据, $NE(p, h)$ 表示 p 是 h 的负证据。现在,我们给出定义:

定义1 $PE(p, h) \leftrightarrow_{def} pS \sim p[h]$

定义2 $NE(p, h) \leftrightarrow_{def} \sim pSp[h]$

从这个定义我们可得到下面的定理。

定理2 $PE(p, h) \wedge PE(q, h) \rightarrow PE(p\delta q, h)$

定理3 $PE(p, h) \wedge PE(q, h) \rightarrow PE(p \text{ or } q, h)$

定理4 $NE(p, h) \wedge NE(q, h) \rightarrow NE(p\delta q, h)$

定理5 $NE(p, h) \wedge NE(q, h) \rightarrow NE(p \text{ or } q, h)$

定理6 $PE(p, h) \wedge qSp[h] \rightarrow PE(q, h)$

定理7 $NE(p, h) \wedge pSq[h] \rightarrow NE(q, h)$

从定理6我们得知,一个事态支持 h 比一个正证据支持 h 更强,那么,它就是一个正证据。定理7意味着一个事态支持 h 比一个负证据支持 h 更弱,则它是负证据。以上性质在我们的现有的不确定推理理论以及 Shafer G. 的证据的数学理论中都有很好的体现,事实上,从定义直接就有:

• 100 •

定理8 $PE(p, h) \leftrightarrow NE(\sim p, h)$

定理9 $NE(p, h) \leftrightarrow PE(\sim q, h)$

关于证据有关的证明是容易的,一般只需要用关于事态的变形等值替换规则和支持表达式的变形规则和五条公理就足够了,不过关于整个形式规则叙述则需较大的篇幅,我们将另文予以叙述。关于证据我们还有下面的定理

定理10 $PE(p, h) \rightarrow (PE(p\delta q, h) \leftrightarrow p\delta qS \sim q[h])$

定理11 $PE(p, h) \rightarrow (\neg PE(p\delta q, h) \wedge \neg NE(p\delta q, h) \leftrightarrow (p\delta qSp\delta \sim q[h]))$

定理12 $PE(p, h) \rightarrow (PE(p \text{ or } q, h) \leftrightarrow \sim p\delta qS \sim q\delta \sim q[h])$

定理13 $PE(p, h) \rightarrow (\sim PE(p \text{ or } q, h) \wedge \sim NE(p \text{ or } q, h) \leftrightarrow (\sim p\delta \sim qSp\delta \sim q[h]))$

定理14 $NE(p, h) \rightarrow (NE(p\delta q, h) \leftrightarrow \sim p\delta qSp\delta q[h])$

定理15 $NE(p, h) \rightarrow (\neg NE(p\delta q, h) \wedge \neg NE(p\delta q, h) \leftrightarrow (\sim p\delta qSp\delta \sim q[h]))$

定理16 $NE(p, h) \rightarrow (NE(p \text{ or } q, h) \leftrightarrow \sim p\delta \sim qS \sim p\delta q[h])$

定理17 $NE(p, h) \rightarrow (\neg NE(p \text{ or } q, h) \wedge \neg NE(p \text{ or } q, h) \leftrightarrow (\sim p\delta \sim qSp\delta \sim q[h]))$

这些定理都是支持重言式。

后记 从前面的讨论表明,我们提出的支持逻辑用来刻画“一个事态发生支持某个结论比另一个事态发生对那个结论的支持更强”这一概念是合适的。在此基础上我们给出了正证据和负证据的形式定义。给出了十七个定理,能够很好反映证据的特征。这样,我们就以形式化的方式回答了什么是支持?什么是证据?这两个基本问题,给支持和证据的形式化研究提供了理论基础,支持与证据的形式化系统的建立从本文的简要说明和解释给出了其框架,这方面的详细讨论留给以后的文章去论述。

这里我们还要想说的是,从实用观点看,这样的形式化方法也是有意义的,特别,当一个证据按具体意义难于确定其数值时,根据经验用这种逻辑分析方法来研究也不失为一个有效的方法。

形式化方法也可用作语义研究评价的基准。再者,支持与证据的形式化理论作为一种新的理论本身也有理论价值。

参考文献

- 1 陈国祺. What is an Evidence? The Formal Discussion Evidence. 见: 第五届国际知识系统不确定信息处理与控制会议文集, 法国巴黎, 1994
- 2 Shafer G A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton New York, 1976