

迭代函数系 IFS 吸引子图像控制方法的研究*)

Research on the Control of the IFS Attractor Images

朱志良 刘向东 王光兴 朱伟勇

(东北大学计算中心 沈阳110006)

Abstract In this paper, the way to control the details and the color of the IFS attractor images was discussed. Differing from the former methods, the interrelations between the entirety and parts, part and part were discussed. Finally, the effects of the methods were showed by computer experiments in the simulation of the trees.

Keywords Iteration function systems, IFS attractor, Natural scene simulation

1 引言

1985年, Williams 和 Hutchinson 开创了分形几何中迭代函数系 IFS (Iterated Function Systems) 的研究, 建立了 IFS 的基础理论. M. F. Barnsley 和 S. Demko 的进一步工作使得 IFS 成为构造任意维数分形集方便、有效的方法, 并将之应用到图像的压缩与处理, 使得该理论引起人们的关注^[1~2]. 现在, IFS 已经成为分形研究的一个重要部分, 其理论与方法是分形自然景观模拟及分形图像压缩的理论基础. IFS 的应用推广工作也得到迅速地发展. 在用 IFS 吸引子进行自然景观模拟的研究中, J. C. Sprott 利用随机参数控制 IFS 吸引子, 讨论了 IFS 可生成的基本图元^[4]; 由于普通 IFS 吸引子形状十分规则, Karel Culik II 和 Simant Dube 为在 IFS 吸引子的图像上取得有序和混沌的平衡, 引入了 MRFS (Mutually Recursive Function Systems), 通过对函数迭代序列的控制以控制吸引子图像^[5], 进而引发了 IFS 推广以加强控制吸引子的一系列方法, 如: Recurrent IFS, Mixing IFS, Hierarchical IFS (HIFS), Markov IFS, Controlled IFS 和 Language-restricted IFS (LRIFS) 等, 这些推广拓展了 IFS 吸引子的表示范围及图像生成^[3]. 国内也有许多学者进行过这方面的研究^[7~9]. 本文讨论了 IFS 吸引子图像局部形态与色彩的控制方法, 主要讨论了整体与局部、局部与局部相关性的控制, 并通过 IFS 吸引子图像对不同树木的模拟展示了给出控制方法的作用.

2 IFS 的基本理论

2.1 基本理论

完备度量空间 (X, ρ) 与定义在其上的有限压缩映射族 $w_n: X \rightarrow X, n=1, 2, \dots, N$, 组成迭代函数系 IFS, 记作 $(X; w_n, n=1, \dots, N)$; 如果 w_n 的压缩比为 $c_n, n=1, 2, \dots, N$, 则称 $c = \max_{1 \leq n \leq N} \{c_n\}$ 为此 IFS 的压缩比.

在 X 的非空紧子集上定义变换 W :

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B), \forall B \in H(X), \text{ 有}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) \quad \forall B \in H(X) \quad (1)$$

称为该 IFS 的吸引子^[3].

由一族压缩映射组成的 IFS 可以确定“复杂”的集一分形吸引子, 它们一般很优美, 可以用来模拟很多自然景观.

2.2 随机迭代算法

IFS 吸引子的构造经常采用随机迭代算法. 随机迭代算法绘制 IFS 吸引子实质上是按概率选取的不同映射, 不断映射得到新点并画点的过程. 算法描述如下:

①任取 $x \in A$ (如直接取不到这样的点, 可对任意初始点用充分长的一个随机迭代映射序列作用得到 x), 给定一个充分大的自然数 $N_{\max}$ (迭代次数);

②为压缩映射族 $\{w_r, r=1, 2, \dots, N\}$ 选定一个概率分布 $\{p_r, r=1, 2, \dots, N\}$, $\sum_{r=1}^N p_r = 1, p_r > 0, r=1, 2, \dots, N$.

*) 本文得到国家自然科学基金(69974008)及国家博士点学科专项科研基金(97014510)项目资助. 朱志良 教授, 博士, 主要研究领域为网络、通信与混沌分形理论. 刘向东 副教授, 博士, 主要研究领域为混沌分形理论、计算机图形、图像. 朱伟勇 教授, 博士生导师, 主要研究领域为混沌分形理论、最优实验设计. 王光兴 教授, 博士生导师, 主要研究领域为网络与通信技术.

$\dots, N(p_i)$ 一般按压缩映射的压缩比选取, 即:

$$p_i = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^N c_i},$$

并对 $c_i = 0$ 的映射给予特殊的处理: 令 p_i 为一个相当小的数, 并对其它 p_i 作出相应的调整;

③ 根据概率分布 $\{p_i; i=1, 2, \dots, N\}$ 从 $\{w_i; i=1, 2, \dots, N\}$ 中随机选取一个 w_i ;

④ $x := w_i(x); N_{max} := N_{max} - 1$; 画点 x ;

⑤ 若 $N_{max} = 0$, 结束; 否则, 转③。

根据遍历定理, 随机迭代算法迭代充分多步后即可得到近似的 IFS 吸引子; 并且该算法的构造速度很快。

3 树木的模拟与 IFS 吸引子图像的控制

由于分形图像的特征是整体和局部具有自相似性, 故改变局部整个图像随之变化, 也正是由于这种严格自相似性, 使得直接用 IFS 吸引子模拟自然景物总是显得比较“呆板”, 且不能对固定的某一景物进行特

定的模拟。推广的 IFS 及国内许多学者给出的方法, 一些是从理论上给出的可能性分析, 一些控制方法过于复杂, 难于在实际应用, 一些仅是就 IFS 吸引子整体形状进行控制, 缺乏进一步局部细节控制的能力, 本文给出几种 IFS 吸引子随机迭代算法的改进方法, 可以在吸引子形状整体控制的基础上, 非常方便地实现其局部细节与色彩的控制。

图 1(a) 给出 R^2 子集 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的 7 个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_7$ 对 $[0, 1] \times [0, 1]$ 作用一次的区域。图 1(b) 是 6 个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_5, w_7$ 对应的 IFS 吸引子。图 1(c) 是 7 个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_5, w_6, w_7$ 对应的 IFS 吸引子, 它们都是严格自相似的。图 1(b) 中大树有 4 个分枝, 每个分枝上又有 4 个小分枝, 再下一级的更小的分枝也是一样的; 而图 1(c) 中大树有 5 个分枝, 每个分枝上又有 5 个小分枝。如果将图 1(c) 看作是对图 1(b) 的加一个 w_6 对应分枝修改, 或将图 1(b) 看作是对图 1(c) 的减一个 w_6 对应分枝修改, 则这种修改的作用不仅仅是局部的, 它对整个 IFS 吸引子都起作用。

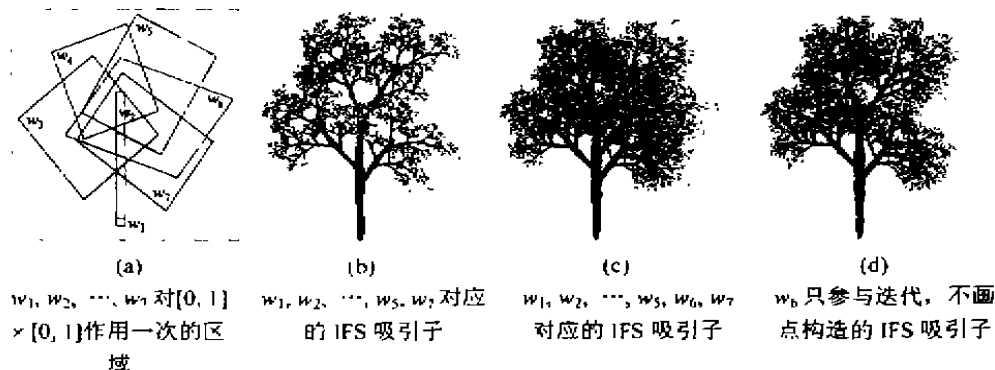


图 1 压缩映射及其 IFS 吸引子

3.1 IFS 吸引子局部形状的控制方法

(1) 某些映射只参与迭代, 不画点 规定某些映射只参与迭代, 但不画点, 即将上述算法第①步最后加上: 给定 $j_1, j_2, \dots, j_m (m < N)$, 指定哪些映射只参与迭代, 但不画点; 第④步改为: ④ $x := w_i(x); N_{max} := N_{max} - 1$; 如果 $i = j_1, j_2, \dots, j_m$, 直接转到⑤; 否则, 画点 x 。

图 1(d) 是 7 个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_5, w_7$, 但 w_6 只参与迭代, 不画点构造的 IFS 吸引子。它相当于图 1(c) 去掉 w_6 对应的分枝, 或图 1(b) 中每个分枝及其上各级小分枝加上 w_6 对应的小分枝。这时整体与局部已不再严格自相似了, 这使得我们可以只作对吸引子某些局部小范围的修改, 而不影响吸引子的整体形状, 即大范围不见, 小区域相关。

(2) 某些映射迭代、画点, 然后退到迭代前的点

规定某些映射迭代、画点, 然后退到迭代前的点, 即在上述算法第①步最后加上: 给定 $j_1, j_2, \dots, j_m (m < N)$, 指定哪些映射迭代、画点, 然后退到迭代前的点; 第④步改为: ④ $N_{max} := N_{max} - 1$; 如果 $i = j_1, j_2, \dots, j_m$, $y := w_i(x)$, 画点 y ; 否则, $x := w_i(x)$, 画点 x 。

图 2(a) 是 7 个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_5, w_6, w_7$, 但 w_6 迭代、画点, 然后退到迭代前的点构造的 IFS 吸引子。它相应于图 1(c) 每个分枝及其上各级小分枝去掉 w_6 对应的小分枝, 或图 1(b) 中加上 w_6 对应的仅与没加 w_6 之前整体相似的分枝, 即独立地加入一个与其它枝相关的树枝, 但不影响其它树枝。这时整体与局部也不再严格自相似, 使得我们可以只作对吸引子较大范围的修改, 而不影响吸引子的原来的整个部分局部细微形状结构, 即大范围见, 小区域不相关。

3.2 IFS 吸引子色彩的控制与串限制

将(1)和(2)这2种技术结合,可以实现对 IFS 吸引子形状更强的控制,并可通过建立映射串与色彩索引表实现吸引子图像色彩控制。

规定某些映射只参与迭代,但不画点;再规定某些映射迭代、画点,然后退到迭代前的点;进一步,可以规定某些映射当它们的前一次迭代是某些映射时,只参与迭代,但不画点;某些映射当它们的前一次迭代是某些映射时,迭代、画点,然后退到迭代前的点。即将上述算法第①步最后加上:给定2个由0和1组成的 $N \times N$ 矩阵 $(a_{ij})_{N \times N}$ 和 $(b_{ij})_{N \times N}$, $(a_{ij})_{N \times N}$ 指定每一映射后映射是否只参与迭代但不画点, $(b_{ij})_{N \times N}$ 指定每一映射后映射是否迭代、画点,然后退到迭代前的点,第④步改

为:

④. $x_i = w_i(x)$; 如果 $a_{pi} = 0$, 不画 x , 否则, 画 x ;
如果 $b_{pi} = 0$, $x_i = w_i^{-1}(x)$; $N_{max} = N_{max} - 1$;
 $p_i = i$ 。

图2(b)是7个压缩映射 $w_1, w_2, \dots, w_6, w_7, w_8$ 迭代、不画点,并且当 w_6 迭代前映射是 w_1 和 w_7 时退到迭代前的点构造的 IFS 吸引子。它相当于图1(c)去掉 w_6 迭代对应的分枝, w_4 和 w_7 对应的2个分枝及其上各级小分枝去掉 w_6 对应的小分枝, w_3 和 w_5 对应的2个分枝上的 w_4 和 w_7 对应的小分枝,以下各级分枝类似去掉这些 w_6 对应的小分枝,或图1(b)中 w_3 和 w_5 分枝上加上 w_6 对应的小分枝, w_4 和 w_7 分枝上的小分枝加上 w_6 对应的小分枝,以下各级类似处理。



图2 不同方法描绘的 IFS 吸引子

如果我们建立一个映射串与色彩索引表,还可以很容易地通过映射串控制吸引子图像不同区域的色彩。图2(b)只用一个映射串控制吸引子图像的色彩,即不同映射迭代的点画不同的颜色,图像共6种色彩,可以看到对小树枝色彩描绘得不好;图2(c)用2个映射串控制吸引子图像的色彩,不同组合映射次序迭代的点画不同的颜色,图像共19种色彩,可以看到对小树枝的色彩得到较好的描绘。

结论 IFS 吸引子有着极丰富的表现范畴,是模拟自然景物的有力工具。我们可以通过参数的调整控制其吸引子的形状,在模拟自然景观、虚拟现实等技术中广泛应用。本文给出几种 IFS 吸引子图像局部形态与色彩的控制方法,讨论了整体与局部、局部与局部相关性的控制,极大地丰富了 IFS 可以表现的能力,使我们不仅可以考虑图像局部与整体间的相似性,也可以考虑局部与局部间的相似性。

参考文献

- 1 Demko S, Hodges L, Naylor B. Construction of Fractal Objects with Iterated Function Systems. Computer Graph-

ics, 1985, 19(2): 271~278

- 2 Barnsley M F, Demko S. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals. In: Proc. Royal Soc. London A399, 1985: 243~275
- 3 Haeseler F V, Peitgen H-O, Skordov G. Linear Cellular Automata, Substitutions, Hierarchical Iterated Function Systems and Attractors. In: Fractal Geometry and Computer Graphics, J. L. Encarnacao, H-O. Peitgen, G. Sakas, G. Englert Eds., Springer-Verlag, 1991: 3~23
- 4 Sprott J C. Automatic Generation of Iterated Function Systems. Comput. & Graphics, 1994, 18(3): 417~420
- 5 Karel Culik II, Sumant Dube. Balancing Order And Chaos In Image Generation. Comput. & Graphics, 1993, 17(4): 465~486
- 6 John W. Layman and TADE. Womack, Linear Markov Iterated Function Systems. Comput. & Graphics, 1990, 14(2): 343~353
- 7 张正柄, 朱耀庭, 朱光喜. 实现图像几何变换的迭代函数系统修改法. 数据采集与处理, 1996, 11(3): 168~171
- 8 李富平, 蔡秀云. 迭代函数系统中 IFS 码的变换及应用. 工程图学报, 1998, 35(2): 48~51
- 9 刘树群. IFS 吸引子图像仿射变换的参数变换法. 甘肃工业大学学报, 1998, 24(4): 66~70