计算机科学2001Vol.28№.7

基于 Vague 集的加权多目标模糊决策方法*)

Weighted Multicriteria Decision Making Based on Vague Sets

李凡 饶勇

(华中科技大学计算机学院 武汉430074)

Abstract The characteristics of vague sets are analyzed, the deficiency of the score function proposed by Chen using vague sets to handle multicriteria decision making problems is pointed out. A new score function of weighted forms is then given, it satisfies the "voting model" of vague sets very well. Through numerical examples, it shows our method is more versatile.

Keywords Fuzzy set, Vague set, Score function, Fuzzy decision making

1 引言

在多目标模糊决策支持系统中,通常要在多个目标中依据有关约束条件选择最佳的目标。由于信息的不确定性,许多学者采用 Fuzzy 集理论来处理这类问题[1,2]。Chen 在文[3]中提出了采用 Vague 集[4,5]的方法来处理模糊条件下的多目标决策问题,并讨论了加权情况下的处理方法。然而在 Chen 的方法中,没有定义加权情况下 Vague 集的运算,其加权处理是针对目标选择计分函数 S 的、而非 Vague 集;并且文[3]中的目标选择计分函数 S 的定义与实际的投票模型结果也不相符,从而使得采用该方法所获得的决策结果仍然存在一些缺陷。我们提出了一种新的在加权情况下的 Vague 集的模糊运算,并重新定义了目标选择函数 S、其定义很好地采用了 Vague 集的性质,而且采用该方法所得决策结果也符合人们的直觉。

2 Vague 集的加权模糊运算

约定 P 表示一个加权命题公式,P 的真值用 Vague 集 $V(P)=[t_P,1-f_P]$来表示,$w(P)$表示 P 的权数、$w(P)\in[0,1]$。Vague 集上的加权合取式和加权析取式分别定义如下。

定义1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为 n 个加权命题公式,则 $P=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n$ 也是一个加权命题公式,其中"$\oplus$"表示加权合取运算,并称其为 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$的加权合取式。其真/假值分别定义为:

$$t_P=\max\{\frac{w(P_1)}{w}t_{P_1},\frac{w(P_2)}{w}t_{P_2},\cdots,\frac{w(P_n)}{w}t_{P_n}\}$$

$$1-f_P=\max\{\frac{w(P_1)}{w}(1-f_{P_1}),\frac{w(P_2)}{w}(1-f_{P_2}),\cdots,\frac{w(P_n)}{w}(1-f_{P_n})\}$$

即 $$f_P=1-\max\{\frac{w(P_1)}{w}(1-f_{P_1}),\frac{w(P_2)}{w}(1-f_{P_2}),\cdots,\frac{w(P_n)}{w}(1-f_{P_n})\}$$

式中 $w=\max\{w(P_1),w(P_2),\cdots,w(P_n)\}$。

定义2 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为 n 个加权命题公式,则 $P=P_1\otimes P_2\otimes\cdots\otimes P_n$ 也是一个加权命题公式,其中"$\otimes$"表示加权析取运算、并称其为 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$的加权析取式。其真/假值分别定义为:

$$t_P=1-\max\{\frac{w(P_1)}{w}(1-t_{P_1}),\frac{w(P_2)}{w}(1-t_{P_2}),\cdots,\frac{w(P_n)}{w}(1-t_{P_n})\},$$

$$1-f_P=1-\max\{1-(1-\frac{w(P_1)}{w}f_{P_1}),1-(1-\frac{w(P_2)}{w}f_{P_2}),\cdots,1-(1-\frac{w(P_n)}{w}f_{P_n})\}$$

即 $$f_P=\max\{\frac{w(P_1)}{w}f_{P_1},\frac{w(P_2)}{w}f_{P_2},\cdots,\frac{w(P_n)}{w}f_{P_n}\}$$

式中 $w=\max\{w(P_1),w(P_2),\cdots,w(P_n)\}$。

由上述定义可知,Vague 集上的加权命题公式的真/假值不仅与各子条件的真/假值有关,而且与各子条件的权数有关。上述定义满足 Vague 集的性质[6]。

3 多目标模糊决策系统

设 A 为可选决策目标集,C 为约束条件集,$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$假定任一决策目标 A_i 在约束条件 C_j 下的隶属函数用 *Vague* 集表示为如下形式:

$A_i=\{(C_1,[t_{i1},1-f_{i1}]),(C_2,[t_{i2},1-f_{i2}]),\cdots,(C_n,[t_{in},1-f_{in}])\}$

*)国家高性能计算基金(99313)、华中理工大学科学研究基金(M99015)资助项目。

其中 t_{ij} 表示目标 A_i 满足约束条件 C_j 的程度，f_{ij} 表示目标 A_i 不满足约束条件 C_j 的程度，$t_{ij}\in[0,1]$，$f_{ij}\in[0,1]$，$t_{ij}+f_{ij}\leqslant 1$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。

假定决策者希望在 m 个可选目标集中挑选出一个同时满足约束条件 $C_j,C_k,\cdots,C_p$ 或者满足约束条件 C_s 的目标，那么决策者的要求可以表示为如下的形式：

C_j AND C_k AND … AND C_p OR C_s

任一目标 A_i 适合与不适合该决策要求的程度可以用如下的评价函数 E 来表示：

$$
\begin{aligned}
E(A_i)=&([t_{ij},1-f_{ij}]\otimes[t_{ik},1-t_{ik}]\otimes\cdots\otimes[t_{ip},1-t_{ip}])\\
&\oplus[t_{is},1-t_{is}]\\
=&[\min(t_{ij},t_{ik},\cdots,t_{ip}),\min(1-f_{ij},1-f_{ik},\cdots,1\\
&-f_{ip})]\oplus[t_{is},1-f_{is}]\\
=&[\max(\min(t_{ij},t_{ik},\cdots,t_{ip}),t_{is}),\max(\min(1-\\
&f_{ij},1-f_{ik},\cdots,1-f_{ip}),1-f_{is})]\\
=&[t_{A_i},1-f_{A_i}]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中，$\otimes$，$\oplus$ 分别表示 Vague 集上的交、并运算，$E(A_i)$ 是一个 Vague 值，$1\leqslant i\leqslant m$，$t_{A_i}=\max(\min(t_{ij},t_{ik},\cdots,t_{ip}),t_{is})$，$f_{A_i}=1-\max(\min(1-f_{ij},1-f_{ik},\cdots,1-f_{ip}),1-f_{is})$。

在 Chen 的方法中，采用如下的计分函数 S 来计算任一目标 A_i 满足决策要求的程度

$$S(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i} \tag{2}$$

Chen 指出，$S(E(A_i))$ 的值越大，则表明目标 A_i 越满足决策的要求。

在加权的情况下，若约束条件 $C_j,C_k,\cdots,C_p$ 的权值分别为 $w_j,w_k,\cdots,w_p$，Chen 没有指明约束条件 C_s 的权值。事实上在 Chen 采用的"累加模型"下，约束条件 C_s 的权植显然和加权析取式 C_j AND C_k AND… AND C_p 的权值相同。Chen 提出如下的加权计分函数：

$$
\begin{aligned}
W(A_i)=\max\{&S(E(A_{ij}))*w_j+S(E(A_{ik}))*w_k\\
&+\cdots+S(E(A_{ip}))*w_p,S(E(A_{is}))\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

式(3)中，$S(E(A_{ix}))=t_{A_{ix}}-f_{A_{ix}}$ $(x=j,k,\cdots,p,s)$。为决策目标 A_i 在约束条件 C_x 下的分值。Chen 指出，$W(A_i)$ 的值越大，则表明目标 A_i 越满足决策的要求。显然，由于 Chen 没有定义加权情况下 Vague 集的运算，加权计分函数 W 的值是基于普通点值 S 的累加加权，而该点值 S 的定义显然是不符合 Vague 集的性质的。

我们希望加权和未加权情况下评价函数 E 和计分函数 S 有相同的表达形式，并且均能满足 Vague 集的性质。

利用上节定义的 Vague 集的加权合取式和加权析取式，我们可以很容易地将式(1)转化成如下加权形式：

$$
\begin{aligned}
E(A_i)=&([t_{ij},1-f_{ij}]\otimes[t_{ik},1-t_{ik}]\otimes\cdots\otimes[t_{ip},1-t_{ip}])\\
&\oplus[t_{is},1-t_{is}]\\
=&\max\{[t_p,1-f_p],[t_{is},1-f_{is}]\}\\
=&[t_{A_i},1-f_{A_i}]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

式中，$\otimes$，$\oplus$ 分别表示 Vague 集上的加权交、并运算，$E(A_i)$ 是一个 Vague 值，$1\leqslant i\leqslant m$。

$$t_p=1-\max\{\frac{w_j}{w}(1-t_{ij}),\frac{w_k}{w}(1-t_{ik}),\cdots,\frac{w_p}{w}(1-t_{ip})\}$$

$$1-f_p=1-\max\{1-(1-\frac{w_j}{w}f_{ij}),1-(1-\frac{w_k}{w}f_{ik}),\cdots,1-(1-\frac{w_p}{w}f_{ip})\}$$

$w=\max\{w_j,w_k,\cdots,w_p\}$

$t_{A_i}=\max(t_p,t_{is})$，$1-f_{A_i}=\max(1-f_p,1-f_{is})$

由式(1)和式(4)可知，只需将"$\otimes$，$\oplus$"定义为 Vague 集上的加权交、并运算，即可方便地实现加权情况下评价函数 E 的计算。由于式(1)和式(4)有相同的表达形式，即 Vague 值 $E(A_i)$，所以我们可以用一个统一的计分函数 S 来选择最终的决策目标。

由 Chen 的定义可知 $S(E(A_i))$ 不是严格单调的，这样当有多个目标 $A_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 计分函数 S 的值相同时，Chen 的方法并没有给出相应的处理方法。考虑下述例子：

例1 若 $E(A_1)=[0.2,0.9]$，$E(A_2)=[0.5,0.6]$，$E(A_3)=[0.2,0.7]$，$E(A_4)=[0.4,0.4]$，则由式(3)，可得 $S(E(A_1))=0.2-(1-0.9)=0.1$，$S(E(A_2))=0.5-(1-0.6)=0.1$，$S(E(A_3))=0.2-(1-0.7)=0.1$，$S(E(A_4))=0.4-(1-0.4)=-0.2$。

由上述结果可看出：$S(E(A_1))=S(E(A_2))$，这表明目标 A_1，A_2 对于决策要求来讲其满足的程度是一样的。显然，这是不符合实际的，在实际的决策情况中，人们有可能认为 A_2 要优于 A_1。

$S(E(A_3))>S(E(A_4))$，这表明目标 A_3 比 A_4 更满足决策要求。显然，这也是不符合实际的，因为在实际的决策情况中，人们有可能认为 A_4 要优于 A_3。

我们按"投票模型"来分析上例。$E(A_1)$ 表示2人赞成选择目标 A_1，1人反对选择目标 A_1，7人不表态；$E(A_2)$ 表示5人赞成选择目标 A_2，4人反对选择目标 A_2，1人不表态；$E(A_3)$ 表示2人赞成选择目标 A_3，3人反对选择目标 A_3，5人不表态；$E(A_4)$ 式表示4人赞成选择目标 A_4，6人反对选择目标 A_4。在实际投票中，一般有如下两种情况：

1)同时考虑"赞成票"和"反对票"，即 $S_1(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i}$，选择其 S_1 值最大的目标 A_i，其直观解释为人们倾向于选择同时有最大"赞成票"和最小"反对票"的目标。然而由例1可见，由于该式不是严格单调的，有可能存在多个相同的 S_1 值。在这种情况下，有两种方法可供选择：①假定倾向于"赞成票"多的，即倾向于

"乐观"选择，此时我们另外定义一个计分函数 $S_2(E(A_i))=t_i$；②假定倾向于"反对票"少的，即人们倾向于"悲观"选择，则我们另外定义一个计分函数 $S_2(E(A_i))=1-f_i$，选择其 S_2值最大的目标 A_i。

2）仅考虑"赞成票"多的，即 $S_1(E(A_i))=t_{A_i}$，选择其 S_1值最大的目标 A_i。其直观解释为在选择时，仅考虑"赞成票"多的，即倾向于首先选择得赞成票多的目标；在赞成票相同的情况下，则倾向于选择得反对票少的。此时我们另外定义一个计分函数 $S_2(E(A_i))=1-f_i$，选择其 S_2值最大的目标 A_i。

人们的选择一般分两步进行，而式(2)将这两步合并成一步，这是不符合实际的。对于 *Chen* 提出的计分函数 S 有下述定理：

定理1 若 $E(A_1)\subseteq E(A_2)$，则 $S(E(A_1))\leqslant S(E(A_2))$。其中，

$E(A_1)=[t_1,1-f_1]$，$E(A_2)=[t_2,1-f_2]$；

$S(E(A_1))=t_1-f_1$，$S(E(A_2))=t_2-f_2$

证明：$E(A_1)\subseteq E(A_2)\Rightarrow t_1\leqslant t_2,1-f_1\leqslant 1-f_2\Rightarrow t_1\leqslant t_2,f_1\geqslant f_2\Rightarrow t_1-f_1\leqslant t_2-f_2\Rightarrow S(E(A_1))\leqslant S(E(A_2))$

该定理说明：若 A_1包含于 A_2，即若目标 A_1的赞成数不大于目标 A_2的赞成数且目标 A_1的反对数不小于目标 A_2的反对数时，则选择目标 A_2作为满足决策要求的目标。这是符合实际的。该定理的逆命题是不成立的，这由例1可以看出。在实际情况中，多个目标之间一般不满足 Vague 集所要求的严格包含关系；人们在实际选择决策目标时，也并不要求目标之间满足 Vague 集所要求的严格包含关系。Chen 给出的计分函数显然只能处理这种包含关系。这就限制了该方法的应用范围。

我们提出采用两个计分函数 $S_1(E(A_i))$，$S_2(E(A_i))$来表示目标 A_i 适合和不适合决策要求的程度。在进行决策时，首先根据函数 S_1的值进行选择，该值越大的目标 A_i 越适合决策要求；当有多个 S_1的值相同时，则再根据函数 S_2的值进行选择，该值越大的目标 A_i 越适合决策要求。对于我们提出的两个计分函数 $S_1(E(A_i))$，$S_2(E(A_i))$有如下定理：

定理2 $E(A_i)\subseteq E(A_j)$，当且仅当 $S_1(E(A_i))\leqslant S_1(E(A_j))$，$S_2(E(A_i))\leqslant S_2(E(A_j))$。其中，

$E(A_i)=[t_{A_i},1-f_{A_i}]$，$E(A_2)=[t_{A_j},1-f_{A_j}]$；

$S_1(E(A_i))=t_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$；

或 $S_1(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$

证明：由 Vague 集上包含关系的定义可直接证明。

由该定理可知，新的计分函数 S_1、S_2和 Vague 集上的包含关系本质上是一致的。然而在对目标进行具体选择时，我们的方法是分步进行的，因此不需要决策目标之间满足 Vague 集上的包含关系。

定理3 $E(A_i)=E(A_j)$，当且仅当 $S_1(E(A_i))=S_1(E(A_j))$，$S_2(E(A_i))=S_2(E(A_j))$其中，

$E(A_i)=[t_{A_i},1-f_{A_i}]$，$E(A_2)=[t_{A_j},1-f_{A_j}]$；

$S_1(E(A_i))=t_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$；

或 $S_1(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$

证明：由 Vague 集上相等关系的定义可直接证明。

由该定理可知，当两个目标的计分函数值相同时，则这两个目标是完全相同的，这是符合人们直觉的。而由例1知 Chen 的计分函数 S 是没有此性质的。

4 实例分析

对于 Chen 在文[5]中列举的例子，$E(A_1)=[0.3,0.4]$，$E(A_2)=[0.6,0.7]$，$E(A_3)=[0.8,0.9]$，$E(A_4)=[0.5,0.6]$，$E(A_5)=[0.5,0.6]$。显然，上述结果有如下的包含关系：$E(A_1)\subseteq E(A_4)\subseteq E(A_5)\subseteq E(A_2)\subseteq E(A_3)$，故在此情况下选择目标 A_3作为决策结果是对的。但仔细分析可看出，该例子是一种特殊情况。当不存在这种特殊的包含关系时，就无法采用 Chen 的方法来选择决策目标。下面考虑另一个更一般的例子。

例2 假定 A 为如下可选目标集：$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_5\}$，其相应的评价函数值为：

$E(A_1)=[0.2,1.0]$，$E(A_2)=[0.3,0.9]$，$E(A_3)=[0.4,0.8]$，$E(A_4)=[0.5,0.7]$，$E(A_5)=[0.6,0.6]$，采用我们提出的方法可得到如下的计算结果：

a）当 S_1，S_2取如下值时：$S_1(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$。则有：

$S_1(E(A_1))=0.2$，$S_1(E(A_2))=0.2$，

$S_1(E(A_3))=0.2$，$S_1(E(A_4))=0.2$，

$S_1(E(A_5))=0.2$，$S_2(E(A_1))=1$，

$S_2(E(A_2))=0.9$，$S_2(E(A_3))=0.8$，

$S_2(E(A_4))=0.7$，$S_2(E(A_5))=0.6$。

由上述结果可得：

$S_1(E(A_1))=S_1(E(A_2))=S_1(E(A_3))=S_1(E(A_4))=S_1(E(A_5))$

$S_2(E(A_1))>S_2(E(A_2))>S_2(E(A_3))>S_2(E(A_4))>S_2(E(A_5))$

显然此时应选择目标 A_1。这种情况对应于实际决策中的同时考虑"赞成票"和"反对票"且倾向于"悲观"选择的情况。

b）当 S_1，S_2取如下值时：$S_1(E(A_i))=t_{A_i}-f_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=t_{A_i}$。则有：

$S_1(E(A_1))=0.2$，$S_1(E(A_2))=0.2$，

$S_1(E(A_3))=0.2$，$S_1(E(A_4))=0.2$，

（下转第65页）

SR 的级数为11时所生成的混沌密钥流序列的 χ^2 检验结果，从图中可看出，随着序列长度 N 的增加，χ^2 值减小，且对于任意长度的序列，均有 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{0.05}(1)$（查表可得取显著水平5%，自由度为1时 χ^2 的临界值为3.841），因此该密钥流序列通过 χ^2 检验，这说明序列的均匀性很好。总之，该混沌密钥流序列满足安全性方面的要求，可作为流密码序列来使用。

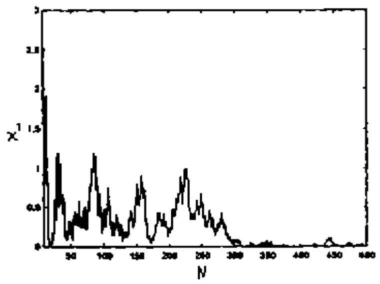

图8　密钥流序列的 χ^2 检验（L=16，n=11）

结束语　本文通过 LFSR 的合成处理来实现有限精度的混沌系统，克服了数字混沌序列的短周期行为，使其相关性能接近于理论比例。我们的结论是经 LFSR 合成处理的混沌序列的周期为混沌序列和 LFSR 码序列周期的最小公倍数，虽然有限精度数字混沌序列的周期不好确定，但可以选择 nT_m 为素数的 LFSR 的级数 n 来尽可能增大输出序列的周期，或较大级数的 LFSR 来达到同样的效果。经过以上计算机仿真说明了本文所提出方法的有效性，从而为混沌动力学的实际应用提供了一种可行的途径。

参考文献

1 Lorenz E N. Deterministic non-periodic flow. J. Atmospheric Sci. ,1964,20(3):130～141

2 Borcherds P H, Mccauley G P. The digital tent map and the trapezoidal map. Chaos, Solitons & Fractal, 1993, 3(4):451～466

3 Palmore J, et al. Computer arithmetic, chaos and fractal. Physica, 1990, D42:99～110

4 Gernak J. Digital generators of chaos. Phys. Lett. A, 1996, 214:151～160

5 周红，等. 有限精度混沌系统的 m 序列扰动实现. 电子学报，1997，25(7)：95～97

6 凌聪，孙松庚. 一种混沌扩频码序列设计的准则，电子科学学刊，1998，20(4)：558～561

7 李克，杨绿溪，何振亚. 一类混沌映射扩频序列的有限精度实现及其相关性能分析. 电路与系统学报，1998，3(4)：98～103

（上接第62页）

$S_1(E(A_5))=0.2$，$S_2(E(A_1))=0.2$，

$S_2(E(A_3))=0.3$，$S_2(E(A_3))=0.4$，

$S_2(E(A_4))=0.5$，$S_2(E(A_5))=0.6$。

由上述结果可得：

$S_1(E(A_1))=S_1(E(A_2))=S_1(E(A_3))=S_1(E(A_4))=S_1(E(A_5))$

$S_2(E(A_1))<S_2(E(A_2))<S_2(E(A_3))<S_2(E(A_4))<S_2(E(A_5))$

显然此时应选择目标 A_5，这种情况对应于实际决策中的同时考虑“赞成票”和“反对票”且倾向于“乐观”选择的情况。

c）当 S_1、S_2 取如下值时：$S_1(E(A_i))=t_{A_i}$；$S_2(E(A_i))=1-f_{A_i}$，则有：

$S_1(E(A_1))=0.2$，$S_1(E(A_2))=0.3$，$S_1(E(A_3))=0.4$，$S_1(E(A_4))=0.5$，$S_1(E(A_5))=0.6$。由上述结果可得：

$S_1(E(A_1))<S_1(E(A_2))<S_1(E(A_3))<S_1(E(A_4))<S_1(E(A_5))$

显然此时应选择目标 A_5，这种情况对应于实际决策中的仅考虑“赞成票”的情况。

由以上讨论可见，由于决策时考虑的重点不同，以及选择目标的策略不同，则对于同一个目标集，可能有多个不同的决策结果，采用我们提出的计分函数和加权计分函数，可以得到符合实际情况的决策结果。这为多目标模糊决策提供了一个十分有用的方法。

参考文献

1 Yager R R. Fuzzy decision making including unequal objectives. Fuzzy sets and systems, 1978, 1:87～95

2 Ibrahim A, Ayyub B M. Multi-criteria ranking of components according to their priority for inspection. Fuzzy sets and systems, 1992, 48(1):1～14

3 Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision making problems based on vague sets theory. Fuzzy sets and systems, 1994, 67(2):163～172

4 李凡. 模糊信息处理系统. 北京大学出版社，1998

5 李凡，徐章艳，饶勇. Vague 集. 计算机科学，2000，27(9)：12～14

6 李凡，饶勇. 基于 Vague 集的加权模糊运算. 华中理工大学学报（待发）