

Petri 网的对偶性质^{*}

Duality Property of Petri Nets

王文德 左凤朝

(聊城师范学院计算机科学系 聊城252059)

Abstract The concept of duality principle and dual mapping is given on Petri net. These duality properties are studied.

Keywords Petri net, Dual Petri net, Element of dual nets, Dual free choice nets

位置/变迁(P/T)网^[1]是一个常用的 Petri 网类,它具有动态、并发和图形直观性等良好特性。因此,这类 Petri 网作为系统模拟与分析的有效工具已在众多领域中得到广泛应用,但对于大系统的分析也是 Petri 网方法遇到的一个难题。目前处理方法一般有两种:一是 Petri 网化简方法,即在保持网的某些性质不变的前提下,将一个复杂 Petri 网化为较简单的 Petri 网^[2];二是通过一些较为简单的小网,利用某种运算或组合而得到较为复杂的大网,且在组合过程中,保持网的某些性质不变,但对 Petri 网的某些结构性质如活性,即使使用了上述方法,也不那么容易讨论。本文引入了 Petri 网对偶概念,可使矛盾进行转化,使复杂的问题变得较为容易。

1. 基本概念和符号

定义1 三元组 $N=(P, T; F)$ 是一个网当且仅当: (1) $P \cap T = \emptyset, P \cup T \neq \emptyset$; (2) $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$; (3) $\text{dom}(F) \cup \text{cod}(F) = P \cup T$ 。

一个 Petri 网是一个二元组 (N, M_0) , 这里 $M_0: P \rightarrow N^+ \cup \{0\}$ (N^+ 为正整数集) 是 N 的初始标识。在 Petri 网中, 流关系 F 中的元素叫弧, 图表示为有向弧; 记 $X = P \cup T$ 是 Petri 网元素的集合; P 是库所集, 其中的元素称为 P -元素, 图表示为圆圈; T 是变迁集, 其中的元素称为 T -元素, 图表示为矩形。

定义2 Petri 网中的 P -元素和 T -元素称为对偶网元素。

定义3 $F^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in F\}$ 称为 F 的逆。

定理1 (对偶原理) 设 $N=(P, T; F)$ 是一个网系统, 将网 N 中的所有网元素换成其对偶网元素, 所有有向弧方向取反, 结果得到另一个网系统, 记为 $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$, 其中 $\bar{P}=\{\bar{p} | \bar{p}$ 为 N 中某一 T -元素的对偶网元素 $\}$, $\bar{T}=\{\bar{t} | \bar{t}$ 为 N 中某一 P -元素的对偶网元素 $\}$, $\bar{F} = F^{-1}$ 。

证明: 由网系统定义, 易验证此结论成立。

定义4 设 $N=(P, T; F)$ 是一个网系统, 把 $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$ 称为 N 的对偶网系统。

定义5 设 $N=(P, T; F)$ 的对偶网系统为 $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$, 记 $X=P \cup T, \bar{X}=\bar{P} \cup \bar{T}$, 映射 $d: X \rightarrow \bar{X}$ 定义为: $\forall x \in X, d(x)$ 为 x 的对偶元素, $\bar{F}=F^{-1}$, 则称 d 为 X 上的对偶映射。

记 $\bar{P}=d(T)=\{d(t) | t \in T\}$;

$\bar{T}=d(P)=\{d(s) | s \in P\}$;

$\bar{F}=d(F)=\{(d(t), d(s)) | (s, t) \in F\}$;

$d(p)=\{d(t) | (p, t) \in F\}$;

$d(t)=\{d(s) | (s, t) \in F\}$ 。

对于 Petri 网 $\Sigma=(N, M_0)$, 记 $\bar{M}_0=d(M_0), \forall \bar{s} \in \bar{P}$, 不妨设 $\bar{s}=d(t), t \in T$ 。为保证对偶网资源的完整性, 定义

$$\bar{M}_0(\bar{s}) = \begin{cases} 0, & t \text{ 在 } M_0 \text{ 无发生权} \\ \sum_{s \in P} M_0(s), & t \text{ 在 } M_0 \text{ 有发生权} \end{cases}$$

定理2 设 Petri 网 $\Sigma=(N, M_0)$, $\bar{N}$ 是 N 的对偶网, $\bar{M}_0=d(M_0)$ 则 $(\bar{N}, \bar{M}_0)$ 仍是一个 Petri 网, 记为 $\bar{\Sigma}=(\bar{N}, \bar{M}_0)$ 。

证明: 由定理1知 $\bar{N}$ 是一个网系统, 根据 $\bar{M}_0$ 与 M_0 的关系可知 $\bar{M}_0$ 是 $\bar{\Sigma}$ 的初始标识, 所以 $\bar{\Sigma}=(\bar{N}, \bar{M}_0)$ 仍是一个 Petri 网。

证毕。

定义6 设 Petri 网 $\Sigma=(N, M_0)$, $\bar{N}$ 是 N 的对偶网系统, $\bar{M}_0=d(M_0)$ (d 为对偶映射), 则称 $\bar{\Sigma}=(\bar{N}, \bar{M}_0)$ 为 Σ 的对偶 Petri 网。特别地, 当 $\bar{N} \equiv N$ 时, 称 Σ 与 $\bar{\Sigma}$ 是自对偶 Petri 网。

定义7 (FC 网) 一个网 $N=(P, T; F)$ 是自由选择网 (FC 网) 当且仅当 $\forall p \in P, |p'| \leq 1$ 或 $(p') = \{p'\}$, 即 $\forall (p, q) \in P \times P, p \neq q, p' \cap q' \neq \emptyset \Rightarrow |p'| = |q'| = 1$ 。

定义8 (AC 网) 一个网 $N=(P, T; F)$ 是非对称

^{*} 山东省自然科学基金资助课题。

选择网(AC网)当且仅当 $\forall (p, q) \in P \times P, p \cap q \neq \emptyset \Rightarrow p \subseteq q$ 或 $q \subseteq p$ 。

2. 对偶映射的性质

定理3 设 $N=(P, T; F)$ 是一个网系统, $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$ 是 N 的对偶网系统, $d: X \rightarrow \bar{X}$ 是对偶映射, 则 d 满足如下性质:

(1) $\forall \bar{s} \in \bar{X}$, 有 $d^{-1}(\bar{s}) = \{d^{-1}(\bar{s}), d^{-1}(\bar{s})\} = d^{-1}(\bar{s})$;

(2) $\forall x \in X$, 有 $d(x) = d(x)$, $d(x) = d(x)$;

(3) d 是一个同构映射(双满射);

(4) d 是连续的。

证明: (1) $\forall p \in \bar{P}$, 据对偶映射的定义知, d 是 1-1 的可逆映射, 故 $\exists t \in T$, 使得 $\bar{p} = d(t)$, 因为 $d^{-1}(\bar{p}) = t$, $dd^{-1}(\bar{p}) = p$, 所以, 要证明 $d^{-1}(\bar{p}) = d^{-1}(\bar{p})$, 只须证 $d(t) = \bar{p}$ 即可。

事实上, $\forall s \in t$, 有 $(s, t) \in F$, 由定义5知 $d(s, t) = (d(s), d(t)) = (\bar{p}, d(t)) \in \bar{F}$, 所以, $d(s) \in \bar{p}$, 故 $d(t) \subseteq \bar{p}$ 。反之, $\forall \bar{i} \in \bar{p}$, 则 $(\bar{p}, \bar{i}) \in \bar{F}$ 。由 d 可逆知, $\exists s \in P$, 使得 $\bar{i} = d(s)$, 而 $\bar{p} = d(t)$, 所以 $d^{-1}(\bar{p}, \bar{i}) = (d^{-1}(\bar{i}), d^{-1}(\bar{p})) = (s, t) \in F$, 从而 $s \in t \Rightarrow d(s) \in d(t) \Rightarrow d(t) \supseteq \bar{p}$ 。

综上所述: $d(t) = \bar{p} \Rightarrow d^{-1}(\bar{p}) = d^{-1}(\bar{p})$ 。

同理可证 $d^{-1}(\bar{p}) = d^{-1}(\bar{p})$, $d^{-1}(\bar{i}) = d^{-1}(\bar{i})$, $d^{-1}(\bar{i}) = d^{-1}(\bar{i})$ 。

(2) $\forall p \in P$, 由定义5知, $\exists \bar{i} \in \bar{T}$, 使得 $\bar{i} = d(p)$, 只须证明 $d(p) = \bar{i}$ 。

事实上, $\forall \bar{s} \in \bar{i}$, 有 $(\bar{s}, \bar{i}) \in \bar{F}$, $\exists t \in T$, 使得 $\bar{s} = d(t)$, 而 $(\bar{s}, \bar{i}) = (d(t), d(p)) = d(p, t)$, $(p, t) \in F \Rightarrow t \in p$, 从而 $\bar{s} = d(t) \in d(p)$, 故 $\bar{i} \subseteq d(p)$ 。反之, $\forall t \in p$, 则 $(p, t) \in F$, 不妨设 $d(t) = \bar{s} \Rightarrow d(p, t) \in \bar{F}$, 而 $d(p, t) = (d(p), d(t)) = (\bar{s}, \bar{i}) \in \bar{F}$, 所以 $\bar{s} \in \bar{i}$, 又 $\bar{s} = d(t) \in d(p)$, 故 $d(p) \subseteq \bar{i}$ 。

综上所述, $d(p) = \bar{i} \Rightarrow d(p) = d(p)$ 。同理可证 $d(p) = d(p)$, $d(t) = d(t)$, $d(t) = d(t)$ 。

(3) 由于对偶映射 d 是 1-1 的, 所以 d 是同构的。

(4) d 是同构的且可逆, 故 d 是一个连续映射。

定理4 设网 $N=(P, T; F)$ 的对偶网为 $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$, 则 N 是 FC 网的充分必要是 $\forall \bar{i} \in \bar{T}$, $|\bar{i}| \leq 1$ 或 $(\bar{i})' = \{\bar{i}\}$ 。

证明: 必要性, $\forall \bar{i} \in \bar{T}$, 据定理1知, $\exists s \in P$, 使得 $\bar{i} = d(s)$ 。由于 N 是 FC 网, 由定义7知, $|s| \leq 1$ 或 $(s)' = \{s\}$, 而 $s = d^{-1}(\bar{i})$, 所以 $s' = d^{-1}(\bar{i})'$, 据定理3的 (1), (3), $d^{-1}(\bar{i}) = d^{-1}(\bar{i})$, $|d(s')| \leq 1 \Rightarrow |d(d^{-1}(\bar{i}))| = |dd^{-1}(\bar{i})| = |\bar{i}| \leq 1$ 。

又 $d(s) = d((s')) = d(s)' = (d(s))' = (\bar{i})'$, 所以 $(\bar{i})' = \{\bar{i}\}$ 。

充分性, 据定义7, 只须证 $\forall p \in P$, $|p| \leq 1$ 或 $(p)' = \{p\}$ 。

事实上, $\forall p \in P$, 不妨设 $d(p) = \bar{i} \in \bar{T}$, 据题设, $|\bar{i}|$

≤ 1 或 $(\bar{i})' = \{\bar{i}\}$, 又 $(\bar{i})' = \{\bar{i}\}$, 有:

$d^{-1}((\bar{i})') = d^{-1}(\{\bar{i}\}) = \{d^{-1}(\bar{i})\} = \{(d^{-1}d(p))'\} = \{p\}$

$(p)' = \{d(\bar{i})\} = \{dd^{-1}(\bar{i})\} = \{p\}$

例1 N 是一个 FC 网(图1), $\bar{N}$ 是 N 的对偶网(图2), 显然, $\bar{N}$ 亦是 FC 网。

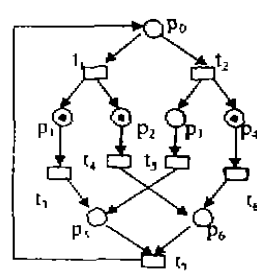


图1 FC 网 N

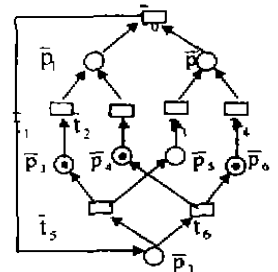


图2 FC 网 $\bar{N}$

定理5 若 $N=(P, T; F)$ 是 AC 网, 且满足 $\forall (t, r) \in T \times T$, $t \cap r \neq \emptyset \Rightarrow t \subseteq r$ 或 $r \subseteq t$, 则 N 的对偶网也是 AC 网。

证明: 设 $\bar{N}=(\bar{P}, \bar{T}; \bar{F})$ 是 N 的对偶网系统, $d: X \rightarrow \bar{X}$ 是对偶映射, $\forall (\bar{p}, \bar{q}) \in P \times P$, 不妨设 $\bar{p} \cap \bar{q} \neq \emptyset$, 据对偶原理, $\exists t_p, t_q \in T$, 使得 $\bar{p} = d(t_p)$, $\bar{q} = d(t_q)$ 。又据定理3(2): $d(t_p) = d(t_p)' = \bar{p}$, $d(t_q) = d(t_q)' = \bar{q}$, 而 $\emptyset = \bar{p} \cap \bar{q} = d(t_p) \cap d(t_q) = d(t_p \cap t_q) \Rightarrow t_p \cap t_q \neq \emptyset$, 由假设, $t_p \subseteq t_q$ 或 $t_q \subseteq t_p$, 所以 $d(t_p) \subseteq d(t_q)$ 或 $d(t_q) \subseteq d(t_p)$, 即 $\bar{p} \subseteq \bar{q}$ 或 $\bar{q} \subseteq \bar{p}$ 。由定义8知 $\bar{N}$ 是 AC 网。

例2 N 是一个 AC 网(图3), $\bar{N}$ 是 N 的对偶网(图4), 显然, 亦是 AC 网。

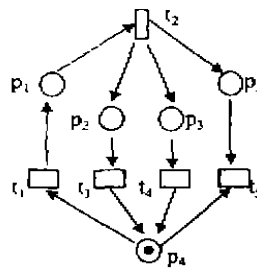


图3 AC 网 N

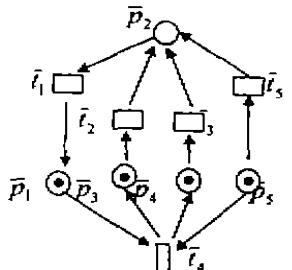


图4 AC 网 $\bar{N}$

参考文献

- 1 Reisig W. Petri nets, an introduction. Springer-Verlag, 1985
- 2 Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541~580
- 3 Best E, Ludmila C, Desel J. Compositional generation of home states in free choice nets. Formal Aspects of Computing, 1992, 4: 572~581
- 4 甄强, 陆维明. 论非对称选择网的活性. 软件学报, 1998, 9(5): 354~359