设备系统完好率截尾序贯检验方法的研究*)

Study of the Methods of Cutting Tail Sequential Testing Intact Rate of Equipment System

孙道德

(阜阳师范学院 安徽阜阳236032)

Abstract In this paper, proceeding from practice of engineering, we give the methods of cutting tail sequential test in judging the index of intact rate of equipment system, provided that the actual time(T) for preparation obeys the logarithmic normal distribution before the system works. In the process of judging, the parameter of contribution (concerning T) obeys no special requirements. Act as a example of application, this paper provid an algorithm on cutting tail squentail test.

Keywords Intact rate of equipment system, Cuttmg tail sequential test, Stopping time, Judgement

一、引 言

系统完好率指标是考核设备系统在规定时间内的可用度、该指标是指设备系统工作准备阶段的技术准备完好率和待机准备完好率(如导弹武器系统作战前的战备完好率)。目前对系统完好率指标的评定多采用A.Wald提出的SPRT(序贯检验比检验)[1],但用此法解决此类问题我们认为有两个缺陷,其一它不是序贯截尾的情况,由于复杂设备系统的实验费用是相当昂贵的,不允许我们做许多次实验而作不出判决;其二SPRT理论有许多重要方面(如含有讨厌参数的检验以及非参数情形的检验等)均未提到。本文所提到的问题涉及到这两个方面,并参考隔离型序贯假设检验方法,较好地解决了这两方面的问题。对系统完好率指标进行了截尾序贯统计判决,且对系统工作前实际准备时间T所服从的对数正态分布中的未知数未作任何要求。我们认为这种方法是切合工程实际的、

设T表示设备系统工作前实际准备时间,t_0为规定的准备时间,定义设备系统完好率为$p=P(T\leqslant t_0)$,当然我们希望p比较大。

根据工程实际事先给定ρ_0,ρ_1($\rho_0>\rho_1$),此时有检验问题:

$$H_0:\rho\geqslant\rho_0\leftrightarrow H_1:\rho\leqslant\rho_0 \tag{1.1}$$

由以往的经验知,系统的准备工作所需时间T(如按规定程序进行的故障判定和排除的过程)常常服从对数正态分布,即$\ln T\backsim N(\mu,\sigma^2)$,其中$\mu$,$\sigma^2$是未知数。换句话说,设备系统工作准备过程(如导弹发射前的准备过程)是按规定程序进行的,此过程所需时间T可认为它服从对数正态分布。

由于系统的实验不允许进行很多次,因此对检验问题式(1.1)施行序贯判决时,必须在截尾样本情况下进行,比如样本容量n_0满足$2\leqslant n_0\leqslant l$(l是一个固定的数)。设$t_1,t_2,\cdots,t_{n0}$是对T的观察值,对给定的犯第一类错误概率$\alpha$我们要找一序贯检验法$\Delta=(\iota,d)$,其中$\iota$是实验的停止时间(样本量),d表示根据停止时间得到的全部数据(序贯样本)对检验问题(1.1)所作的一个判决(接受或拒绝假设H_0)。对$\Delta=(\iota,d)$当$\rho\geqslant\rho_0$时、P(拒绝H_0)$\leqslant\alpha$,且使犯第二类错误的概率β尽可能地小、这样的序贯检验法是本文要研究的问题。

二、截尾序贯假设检验方法

对随机变量T作变换:$X=\ln T$、那么T的观察值$t_1,t_2,\cdots,t_{n0}$变为$X_1=\ln t_1,X_2=\ln t_2,\cdots,X_{n0}=\ln t_{n0}$;$X_0=\ln t_0$。则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1$、$X_2$,$\cdots$,$X_{n0}$ i.i.d.且$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$,这时系统完好率为:

$$\rho=P(T\leqslant t_0)=P(\ln T\leqslant\ln t_0)=\Phi(\frac{X_0-\mu}{\sigma})$$

其中$\Phi(\cdot)$表示标准正态分布函数。记$Y=X_0-X$,$\theta=X_0-\mu$,$\delta=\theta/\sigma$,则有$\rho=P(Y\geqslant0)=\Phi(\delta)$,根据$\Phi(\cdot)$的单调不减性知$\rho$是$\delta$的增函数,因此

$$\rho\geqslant\rho_0\Leftrightarrow\delta\geqslant\sigma_0$$

$$\rho\leqslant\rho_1\Leftrightarrow\delta\leqslant\sigma_1\quad(\rho_0>\rho_1)$$

其中δ_0,δ_1是标准正态分布的分位点。因此检验问题(1.1)等价于下列检验问题:

$$H_0':\delta\geqslant\delta_0\Leftrightarrow H_1':\delta\leqslant\delta_1(\delta_0>\delta_1) \tag{2.1}$$

为用截尾序贯方法对(2.1)进行统计判决,构造如下检验统计量:

$$\zeta_n=\frac{\sqrt{n}\bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y}_n)^2}} \tag{2.2}$$

这里$Y_i(I=1,2,\cdots,n)$为Y的观察值,$\bar{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$。

根据文[2]之第一章内容则有$\zeta_n\sim t_{n-1}(\sqrt{n}\delta)$。也即是说明统计量$\zeta_n$分布只与一个参数$\sigma$有关,它适用于对检验问题(2.1)进行统计判决。我们记$\zeta_n=\zeta_n(\sigma)$。

*)安徽省教委自然科学基金资助课题.

截尾序贯检验法的基本思想是：若只做一次试验就急忙对(2.1)进行判决，显然信息量不够，因此我们不妨设至少要做两次试验才能对检验问题(1.1)作判决。对 $k=2,3,\cdots,n_0$，当 ξ_k 不少于某个给定的数 b_k 时就接受 H_0'，当 ξ_k 不大于某个给定数 a_k 时就拒绝 H_0' $(a_k<b_k)$，当 $\xi_k\in(a_k,b_k)$ 时就不忙做结论，再观察一次，往下研究 ξ_{k+1} 之情况，若至多需做第 n_0 次试验，这时取 $a_{n_0}=b_{n_0}$，如果 $\xi_{n_0}\leqslant a_{n_0}$ 就拒绝 H_0'，若 $\xi_{n_0}>a_{n_0}$，就接受 H_0'。这样整个观察(抽样)最多进行到第 n_0 步就可对(2.1)做出判决了。

这个检验法的停止法则是：

$$\tau=\inf\{k:\zeta_k\notin(a_k,b_k),k=2,3,\cdots,n_0\}$$

其判决法则是：

$$d=\begin{cases}0,\zeta_\tau>a_\tau\\1,\zeta_\tau\leqslant a_\tau\end{cases}$$

这里"d=0"表示接受 H_0'、"d=1"表示拒绝 H_0'。

对给定的截尾数 n_0 和犯第一类错误的概率 α，我们找序贯方法 $\Delta=(\tau,d)$，使得对 $\delta\geqslant\delta_0$，$P_\delta(d=1)\leqslant\alpha$，$P_\delta(d=1)$ 表示对随机变量 $\xi_\tau(\delta)\backsim t_{n-1}(\sqrt{\tau}\,\delta)$，当 $\xi_\tau(\delta)\leqslant a_\tau$ 时的概率，且犯第二类错误的概率 β 尽可能地小(这时 $\tau=2,3,\cdots,n_0$)等价于找 $a_2,b_2,\cdots;a_{n_0-1},b_{n_0-1}$ $(a_k<b_k,k=2,\cdots,n_{0-1})$ 及 $a_{n_0}=b_{n_0}$，使得对 $\delta\geqslant\delta_0$ 有

$$P_\delta(d=1)=P(\xi_2\leqslant a_2)+P(a_2<\xi_2<b_2,\xi_3\leqslant a_3)+\cdots+P(a_2<\xi_2<b_2,\cdots,a_{n_0-1}<\xi_{n_0-1}<b_{n_0-1},\xi_{n_0}\leqslant a_{n_0})\leqslant\alpha,$$

且使 β 尽可能地小。

为对复杂假设(2.1)进行检验，首先我们证明下面事实。

定理 记 $P_{\delta_0}(d=1)=\alpha$，则对任意 n_0 均有

$$\sup_{\delta\geqslant\delta_0}P_\delta(d=1)=\alpha \tag{2.3}$$

证明：为使(2.3)成立，我们只要证明 $P_\delta(d=1)=\alpha$ 是 δ 的不增函数即可。

设 $t_1,t_2,\cdots$ 是概率空间 $(\Omega,F,P_{\mu,\sigma})$ 上独立同分布随机变量序列且 $\ln t_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，设 ξ_n 之定义如前，即

$$\zeta_n=\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y}-n)^2}}\qquad(n\geqslant2)$$

其中：$Y_i=X_0-\ln t_i=\ln\frac{t_0}{t_i}(i\geqslant1)\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，注意到：

$$\tau=\min\{n:2\leqslant n\leqslant n_0,\zeta_n\leqslant a_n\text{ 或 }\zeta_n\geqslant b_n\}$$

这里 $a_n\leqslant b_n(n=2,3,\cdots,n_0-1)$，$a_{n_0}=b_{n_0}$，$n_0\geqslant2$。

$d=\begin{cases}1,\text{当 }\zeta_\tau\leqslant a_\tau\\0,\text{当 }\zeta_\tau>a_\tau\end{cases}$ 令 $C=\{(S_2,S_3,\cdots,S_{n_0}):S_2,S_3,\cdots,S_{n_0}$ 都是实数，且存在 $2\leqslant k\leqslant n_0$ 使 $S_k\leqslant a_k$，但对一切 $i<k$ 有 $s_i<b_i\}$，不难推知：

$$\{d=1\}=\{(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n_0})\in C\} \tag{2.4}$$

集合 C 显然有这样的性质：若 $(S_2,S_3,\cdots,S_{n_0})\in C$，$\tilde{s}_i\leqslant s_i,(i=2,3,\cdots,n_0)$，则 $(\tilde{s}_2,\tilde{s}_3,\cdots,\tilde{s}_{n_0})\in C$ (2.5)

设 $u_1,u_2,\cdots$ 是某概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{F},\tilde{P})$ 上独立同分布随机变量序列且 $u_i\sim N(0,1)$，令

$$\zeta_n(\delta)=\frac{\sqrt{n}u_n+\sqrt{n}\,\delta}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u}_n)^2}}(n\geqslant2),\ \overline{u}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i$$

我们指出，当时 $\delta=\theta/\sigma$ 时 $(\theta=X_0-\mu)$ $(\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_{n_0})$ 与 $(\zeta_2(\delta),\zeta_3(\delta),\cdots,\zeta_{n_0}(\delta))$ 有相同的概率分布(注意，两个随机向量所在的概率空间不同！)

实际上，对任何实数 $z_2,z_3,\cdots,z_{n_0}$ 有：

$$\begin{aligned}
&P_{\mu\sigma}(\zeta_n\leqslant z_n,n=2,3,\cdots,n_0)\\
&=P_{\mu\sigma}\Big(\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y}_n)^2}}\leqslant z_n,n=2,3,\cdots,n_0\Big)\\
&=P_{\mu\sigma}\frac{\big(\sqrt{n}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\frac{Y_i-\theta}{\sigma}\big)\big)+\sqrt{n}\,\delta}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big(\frac{Y_i-\theta}{\sigma}-\frac{\overline{Y}_n-\theta}{\sigma}\big)^2}}\leqslant z_n,\\
&\quad n=2,3,\cdots,n_0)\\
&=\tilde{P}\Big(\frac{\sqrt{n}\,\overline{u}_n+\sqrt{n}\,\delta}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u}_n)^2}}\leqslant z_n,n=2,3,\cdots,n_0\Big)\\
&=\tilde{P}(\zeta_n(\delta)\leqslant z_n,n=2,3,\cdots,n_0)。
\end{aligned}$$

故 $(\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_{n_0})$ 与 $(\zeta_2(\delta),\zeta_3(\delta),\cdots,\zeta_{n_0}(\delta))$ 有相同的概率分布(当 $\delta=\theta/\sigma$ 时)。

对给定的 $\delta_1<\delta_2$，由 ζ 表达式及(2.5)式知，$\zeta_i(\delta_1)<\zeta_i(\delta_2)$，$i=2,3,\cdots,n_0$ 且 $(\zeta_2(\delta_1),\cdots,\zeta_{n_0}(\delta_1))\in C$，再由(2.4)得：

$$\begin{aligned}
&P_{\delta_2}(d=1)=P_{\mu\sigma}(d=1)=P_{\mu\sigma}((\zeta_2,\cdots,\zeta_{n_0})\in C)\\
&(\text{当 }\delta_2=\frac{X_0-\mu}{\sigma}\text{时})\\
&=\tilde{P}((\zeta_2(\delta_2),\cdots,\zeta_{n_0}(\delta_2))\in C)\\
&\leqslant\tilde{P}((\zeta_2(\delta_1),\cdots,\zeta_{n_0}(\delta_1))\in C)\\
&=P_{\mu,\sigma}((\zeta_2,\cdots,\zeta_{n_0})\in C\\
&=P_{\mu,\sigma}(d=1)=P_{\delta_1}(d=1)\quad(\text{当 }\delta_1=\frac{X_0-\mu}{\sigma}\text{时})。
\end{aligned}$$

这就证明了 $P_\delta(d=1)$ 是 δ 的不增函数，证毕。

由于(2.3)成立，对给定的 α，取判决

$d=\begin{cases}0,\zeta_\tau>a_\tau\\1,\zeta_\tau\leqslant a_\tau\end{cases}$ 使得 $P_{\delta_0}(d=1)=\alpha$

(其中 $\Phi(\delta_0)=\rho_0$)，则对一切 $\delta\geqslant\delta_0$ 都有 $P_\delta(d=1)\leqslant\alpha$。换句话说，对一切 $\delta>\delta_0$，用 $\Delta=(\tau,d)$ 判决，犯第一类错误的概率均不超过给定的 α。

这样我们根据实际情况只要利用概率等式 $P_{\delta_0}(d=1)=P(\xi_2\leqslant a_2)+P(a_2<\xi_2<b_2,\xi_3\leqslant a_3)+\cdots+P(a_2<\xi_2<b_2,\cdots,a_{n_0-1}<\xi_{n_0-1}<b_{n_0-1},\xi_{n_0}\leqslant a_{n_0})=\alpha$，在给定的 δ_0,α 的情况下找出 (a_τ,b_τ) 使 β 尽可能地小，即确定了序贯检验方案 Δ。

参考文献

1 Wald A. Sequential analysis. John wiley 1974
2 陈希孺. 数理统计引论. 科学出版社，1981
3 周源泉，等. 可靠性评定. 科学出版社，1991