快速小波变换的加速算法(I)*)

Accelerate Algorithms of Fast Wavelet Transform

李建平　严中洪
(后勤工程学院国际小波分析应用研究中心　重庆400016)
张万萍
(电子科技大学应用数学系　成都610054)

Abstract A novel method of analytic construction for wavelet filter coefficients is put forward, and corresponding fast wavelet transform is set up. It is more oversimplified, more speedy than famous Mallat Algorithm.

Keywords Wavelet transform, Fast algorithm, Accelerative way

1 自适应方法对小波变换的迫切期望

图像、语音等处理技术的研究加快了小波理论的发展[1~3]、今天信号处理技术随着通讯技术、计算机或机器人感知技术(实现计算机视觉、听觉、嗅觉、温度、运动等方面感知能力的技术)的飞速发展必将迎来更快发展,正如文[1]中所述:"忽然间不可避免地涌现出了各种各样的非线性算法、从而也打开了信号处理通往现代数学的大门。除了传统的应用如信号传输、编码和信号恢复之外,信号处理也进入了信息分析的领域。"对于信号与信息处理来说,为信号处理方法和各种运算构造相应的、有针对性的、自适应的表示方法是一个首要问题,信号的特征化表示是信息分析的前提,抽取信号的特征就必然要求适合自身需要的特征算法,这就是大家感兴趣的自适应方法,小波理论和算法在信号特征提取方面有自己独特的能力,但是我们应该看到小波文献中大量理论叙述了 $L^2(R)$ 空间中的连续问题或分解的方法,在有限维空间中却讨论得比较少、事实上那些复杂的小波积分变换公式(傅立叶变换或逆变换)在理论上具有完美的意义、却使具体计算处于一个令人难堪的境地,可操作性不敢恭维、毕竟FFT还是那么令人信服!自从有了Mallat塔式分解方法、似乎这一现象得到了很大改观。如果一个算法具有自适应能力,对信号压缩、噪声滤波和模式识别都有极为重要的意义。本文试图深入分析Mallar塔式分解方法和传统FFT方法,探索其内在结构的不同和差异。

2 小波滤波器统一分解构造方法

文[2,3]叙述了小波滤波器统一分解构造方法,它假设了紧支集上正交小波基条件:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)=\sqrt{2} \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} h(2i)=\sum_{i=0}^{N-1} h(2i+1)=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} h0\ h1\ h2\cdots h(2N-1) & & \\ & h0\ h1\ h2\ \cdots\ h(2N-1) & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & h0\ h1\ h2\ \cdots\ h(2N-1) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{bmatrix} \text{为行正交矩阵} \tag{3}$$

实际上还有一个条件:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i)=1 \tag{4}$$

(3)式中的行正交实际上是卷积

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i+2q)=0;q=1,2,3\cdots$$

成立,其中当 $i+2q$ 超过 $2N-1$ 时 $h(i+2q)=0$;

记 $C(N)$,$S(N)$ 分别为滤波器(3)式中的偶数项、奇数项:

$$C(N)=\{h0,h2,h4,\cdots,h(2N-2)\} \tag{5}$$

$$S(N)=\{h1,h3,h5,\cdots,h(2N-1)\} \tag{6}$$

对任意一个参数 α,注意当 N=1时,$C(1)=\{\cos\alpha\}$;$S(1)=\{\sin\alpha\}$。定义递推计算公式为:

*)本文的研究得到国家自然科学基金项目(69903012)资助。李建平　博士、教授,博导、主要研究领域是小波分析、分形理论、神经网络、电子商务与排队论等。

$$C(N)=\{\cos\alpha(C(N-1),0)-\sin\alpha(0,S(N-1))\} \quad (7)$$

$$S(N)=\{\sin\alpha(C(N-1),0)+\cos\alpha(0,S(N-1))\} \quad (8)$$

定义逆递推计算公式为：若(3)式成立，则取 $\alpha=arctg(\frac{h1}{h0})$，使得：

$$(C(N-1),0)=\{\cos\alpha C(N)+\sin\alpha S(N)\} \quad (9)$$

$$(0,S(N-1))=\{-\sin\alpha C(N)+\cos\alpha S(N)\} \quad (10)$$

成立。根据式(7)～(10)有

定理1(充分性)　对任一组参数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_N$，使得由式(7)、(8)来计算得到：

$$C(N)=\{h0,h2,h4,\cdots,h(2N-2)\}$$

$$S(N)=\{h1,h3,h5,\cdots,h(2N-1)\}$$

使得式(3)、(4)成立，若要求(1)、(2)成立，当且仅当

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N=\frac{\pi}{4}。$$

定理2(必要性)　若 $C(N)=\{h0,h2,h4,\cdots,h(2N-2)\}$，$S(N)=\{h1,h3,h5,\cdots,h(2N-1)\}$，使得(3)(4)成立，由式(9)、(10)可反演算出一组 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_N$。同时若(1)、(2)也成立，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_N=\frac{\pi}{4}$。

以上定理的证明见文[2,3]。

在文[2,3]中已验证了著名的 Daubchies 小波、Coifman 小波、Beylkin 小波和 Vaidyanathan 小波，其参数都可用定理1来描述。

3　在 R^n 空间中小波变换的矩阵形式

设低通滤波器为 H，高通滤波器为 G，则 Mallat 塔分解算法的矩阵形式为：

$$H=\begin{bmatrix} h0\ h1\ h2\ \cdots\ h(2N-1) & & \\ & h0\ h1\ h2\ \cdots\ h(2N-1) & \\ & \cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots & \\ h2.\ h3\ \cdots\cdots & & h0\cdots h1. \end{bmatrix}_{n\times 2n} \quad (11)$$

$$G=\begin{bmatrix} -h(2N-1)\ h(2N-2)\ \cdots -h1\ h0 & & \\ & -h(2N-1)\ h(2N-2)\ \cdots\ -h1\ h0 & \\ \cdots\cdots & & \\ -h(2N-3)\ h(2N-4)\ \cdots\cdots & & -h1\ h0. \end{bmatrix}_{n\times 2n} \quad (12)$$

将 H 与 G 重新按奇偶列有：

$$H=\begin{bmatrix} h0\ h2\ \cdots h(2N-2)\cdots\cdots h1\ \ h3\cdots h(2N-1) & \\ & h0\ h2\ \cdots h(2N-2)\cdots\cdots h1\ \ h3\cdots h(2N-1) \\ \cdots\cdots & \\ .h4\cdots h6\cdots\cdots\ \cdots\cdots h0\cdots\cdots h5\cdots h7\cdots\ \cdots\cdots h1. & \\ h2\cdots h4\cdots\cdots\ \cdots\cdots h0\ h3..h5\cdots\cdots\cdots h1. & \end{bmatrix}_{n\times 2n} \quad (13)$$

$$G=\begin{bmatrix} -h(2N-1)\ \ -h(2N-3)\cdots\cdots -h1\cdots\cdots\ .h(2N-2)\ h(2N-4)\cdots h0\cdots & \\ & -h(2N-1)-h(2N-3)\cdots\cdots\ \cdots\cdots h(2N-2).\ h(2N-4)\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ -h(2N-3)\ \ -h(2N-5)\cdots\ \cdots\cdots -h(2N-1)\ \ h(2N-4)\ \ h(2N-6)\cdots\cdots h(2N-2)). & \end{bmatrix}_{n\times 2n} \quad (14)$$

记置换矩阵：将单位阵的第一行置换到最后一行为：

$$E_2=\begin{bmatrix} 0\,1\ 0\ 0\ \cdots\cdots & \\ 0\ \ \ 0\ 1\ 0\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots\cdots & 1 \\ 1\ 0\ 0\ 0\ \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad (15)$$

定义变换矩阵：

$T(a)=\begin{pmatrix} \cos a.I & \sin aI \\ -\sin aE_2 & \cos aE_2 \end{pmatrix}$ 与逆变换矩阵 $T^{-1}(a)$：

$$T^{-1}(a)=\begin{pmatrix} \cos a.I & -\sin a.E_2^T \\ \sin aI & \cos aE_2^T \end{pmatrix}$$

其中 I 是单位矩阵。$T(0)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ 显然是满足行正交条件(3)的。

记 $F_N=\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix}$，有：

定理3(充分性)　设 $N>=1$，$F_{N-1}=\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_N-1 \end{pmatrix}$ 是形如(11)～(12)或(13)、(14)排列的矩阵($n\times 2n$ 阶)，如果 F_{N-1} 满足行正交条件式(3)，在滤波器新增一个参数 a。取：

$$F_N=F_{N-1}T(a) \quad (16)$$

也是行正交的，且其中 H_N、G_N 排列方式与(11)～(12)或(13)、(14)相同。

证明：正交性是明显的，因为 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 与 $T(a)=\begin{pmatrix} \cos a.I & \sin aI \\ -\sin aE_2 & \cos aE_2 \end{pmatrix}$ 都是正交矩阵，另外注意 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 的排列方式与 E_2 是置换阵，按矩阵乘法直接验证(16)中 F_N 的排列形式即可，证毕。

事实上定理3是定理1的等价形式。

定理4(必要性)　记 $N>=1$，H_N、G_N 是形如(11)～(12)或(13)、(14)排列的，矩阵($n\times 2n$ 阶)，如果 H_N 满足行正交条件(3)，则存在一个 a 使得：

$\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a.I & -\sin aE_2^T \\ \sin aI & \cos aE_2^T \end{pmatrix}$ 其中 I 是单位矩阵　(17)

也是行正交的，且 H_{N-1}、G_{N-1} 的非零元素至少比 H_N、G_N 少一个，排列方式仍相同。

证明：首先把 H_N、G_N 参数元素用向量写成(5)、(6)，根据(3)中行正交性必然存在一个 α 使得(9)、(10)成立，因此式(17)有意义，容易得 H_{N-1}、G_{N-1} 也是正交矩阵。另外注意 $\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix}$ 的排列方式与 E_2 是置换阵，按矩阵乘法直接验证 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 的排列形式即可，注意到(9)、(10)中即知 H_{N-1}，G_{N-1} 的非零参数至少比 H_N、G_N 少一个，证毕。

事实上定理4是定理2的等价形式。

根据式(16)与(17)有：

$$F_N = F_{N-1}T(\alpha) = T(0)T(\alpha_1)T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_N) \quad (18)$$

$T(0)$ 在实际计算时可以不考虑，它仅仅是一个置换阵。逆变换为：

$$F_N^{-1} = T^{-1}(\alpha)F_{N-1}^{-1} = (T(0)T(\alpha_1)T(\alpha_2)\cdots T(\alpha_N))^{-1}$$
$$= (T^T(\alpha_N)T^T(\alpha_{N-1})\cdots T^T(\alpha_1)T^T(0)) \quad (19)$$

推论1 如果将式(16)或(17)中的置换阵 E_2 用其它置换阵(但非单位矩阵，否则式(16)或(17)的形式是十分平凡的)代替，不改变定理的结论，但是 H_N、G_N 的排列方式也作相应的置换。

推论2 如果将式(16)或(17)中的置换阵 E_2 或单位矩阵用其它正交阵代替，不改变定理的结论，但是 H_{N-1}、G_{N-1} 与 H_N、G_N 的排列方式可以没有一致性(这时有可能失去变换的意义)，非零参数个数也可能没有递增(减)性。

例 设有 $a_1 = 0.1054963$，$a_2 = -0.4998413$，$a_3 = 1.1797431$ 三个参数角，此时2n 至少为6，取 $T(\alpha)$ 或 $T^{-1}(\alpha)$ 为6＊6矩阵即可，$\hat{e}_1 = (1,0,0,\cdots,0)^T$，则有：

$$T^{-1}(\alpha_3)T^{-1}(\alpha_2)T^{-1}(\alpha_1)\hat{e}_1$$
$$= (0.3326705, 0.4598775, -0.0854412, 0.8068915, 0.1350110, 0.0352262)^T$$

此式为 N＝3时 Daubechies 基滤波器系数，前三项为偶数项，后三项为奇数项。

对任意一组满足正交条件式(3)的滤波器系数向量：

$$\vec{h}(N) = (C(N), S(N))^T = (h0, h2, \cdots, h(2N-2), h1, h3, \cdots, h(2N-1))^T$$

我们可以根据式(9)、(10)来计算参数角。令 $\vec{h}_N(N) = \vec{h}(N)$，$k = N$。

step1 $\alpha_k = \operatorname{arctg}(\frac{h1}{h0})$；

step2 $\vec{h}_{k-1}(N) = T(\alpha_k)\vec{h}_k(N)$，$k = k-1$；if $k > 0$，goto step1 else stop.

根据此方法我们可以算出 N＝5时 Daubechies 基滤波器参数角为：

(0.020831934932，－0.132405340675，
0.401726035315，－0.816369448387，
1.311614982211)。

4 小波变换加速算法总结

小波分解算法：

取向量 $X_0 \in R^{2n}$，并将 X_0 进行奇偶重排。

step1 $k=0$，计算 $X_{k+1} = T(\alpha_{N-k})X_k$；

step2 k＝k＋1，if k＞N stop else goto step 1

小波重构算法：

step1 k＝N－1，计算 $X_k = T^T(\alpha_{N-k})X_{k+1}$；

step2 k＝k－1，if k＝0 stop else goto step 1

参考文献

1 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 重庆：重庆出版社，1997. 12

2 李建平. 矢量积小波变换. 计算机科学，2000，27(1)88～90

3 李建平. 小波滤波器系数的解析构造. 计算机科学，2000，27(1).91～93

4 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 重庆：重庆出版社，2001. 1，第二版

5 李建平、唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆：重庆大学出版社，1999. 10

6 李建平. 计算机网络与电子贸易的最新技术——矢量积小波变换理论. 重庆：重庆出版社，2001

7 孙荣恒，李建平. 排队论基础. 北京：科学出版社，2001

8 李建平. 基于小波分析的系统与参数识别. 系统科学与数学，2000，20(4)

9 李建平. 从傅里叶分析到小波分析：回顾与发展. 计算机科学，1999，26(12)：29～31