

平面图像的对称性检测方法研究^{*}

On the Methods of Symmetry Detection of the Plane Images

吴刚¹ 杨敬安¹ 李道伦² 张浩¹

(合肥工业大学 A67信箱 合肥230009)¹(中国科技大学计算机系 合肥230027)²

Abstract The symmetry detection of the object is important research area in image analysis and computer vision, and is usually applied in shape matching, model-based object matching, reconstruction of 3D objects, image compression, image database retrieval and so on. This paper defines some of the symmetries by using the representation of mathematics, summarizes the existing methods of symmetries detection by now, and compares their advantages and disadvantages. Furthermore, the paper suggests research directions on the symmetry detection based on the implicit polynomials.

Keywords Symmetry detection, Computer vision, Symmetric axis, Shape analysis

1 引言

对称性是物体与形状的基本特征之一,在图像分析和计算机视觉等领域是一个重要的研究课题。形状的对称性描述和物体对称性特征检测在机器人识别、检验、抓取和推理中有重要应用。根据物体的对称性,可以迅速确定物体内部相对位置关系,使被遮挡或丢失的部分信息恢复出来,并且还可以获得物体在三维空间的位置、方位和姿态^[1]。物体的对称性在图像压缩、形状匹配、目标识别和图像数据库检索等许多领域都有重要应用^[2]。

对称性也是早期格式塔(Gestalt)心理学派研究的内容之一^[3]。在20~30年代,心理学家发现了人类视觉感知组织功能。他们认为三维规则物体最先影响人的注意机制,从而指导后期视觉的物体检测、特征提取与识别。这些三维规则物体的典型特征具有一定的不变性,如对称性、连续性、闭合性、相似性和邻近性等。

近几十年来,国内外文献提出了大量的对称性检测方法,但由于对对称性没有一个准确的数学描述,而且在图像数字化过程中产生许多误差,因此至今没有一种通用性好、效率高的有效算法。本文给出各种对称性的严格数学定义,综述了现有各种对称性检测方法,并比较其优缺点,提出了简单通用的基于隐含多项式曲线对称性检测方法。

2 几种对称性的数学定义

依据几何变换理论,对称性主要可分为镜像对称、

旋转对称和平移对称。依据物体的内部几何关系又可分为斜对称、平行对称和光滑局部对称。

2.1 镜像对称

假设图像中心在原点,图像用极坐标 $f(r, \theta)$ 表示。如果存在一条过原点并与 x 轴夹角为 φ 的直线 l ,使得对某一角 θ ,有 $f(r, \varphi + \theta) = f(r, \varphi - \theta)$,则称图像关于直线 l 为镜像对称,其中 l 称为对称轴。这种对称在自然界普遍存在,如人脸,树叶等。

2.2 旋转对称

对于一图像,其数学表达式为 $f(r, \theta)$,图像中心在原点,如果有:

$$f(r, \theta) = f(r, \theta + \frac{(i-1)2\pi}{k}), i=1, 2, \dots, k, \theta \in [0, 2\pi)$$

则称该图像为 k 次旋转对称图像,过原点和 x 轴夹角为 $\theta + \frac{(i-1)2\pi}{k}$ ($i=1, 2, \dots, k$) 的直线称为旋转对称轴。我们知道圆是一个最为特殊的旋转对称图像,它有无数条对称轴,而椭圆只有两条旋转对称轴。

2.3 斜对称

给定一方向 θ (与图像 x 轴夹角),在图像 $f(x, y)$ 上任取一点 p ,过 p 沿 θ 方向作直线 l_1 交于图像另一点 q ,设线段 p, q 的中点为 r ,如果 $p, r = q, r$,并且所有的 r 都在一条直线 l_2 上,则称该图像为斜对称,直线 l_2 为斜对称轴。显然,当直线 l_1 和 l_2 垂直时,斜对称即为镜像对称。事实上,斜对称图形可由一个镜像对称图形经过正投影变换获得。研究表明,人类视觉系统很容易把斜对称理解成一个实际的镜像对称,而这在物体识

^{*}国家自然科学基金资助项目(编号:69785003,69585002)。吴刚 博士生,主要研究方向为多媒体数据库,计算机视觉等。杨敬安 教授,博导,主要研究图像理解,模式识别,计算机视觉,人工智能与知识工程,进化计算与进化机器人等。

别中有重要应用。文[4]仅根据斜对称即从单幅汽车图像中恢复出汽车的三维外形,这表明斜对称是物体一个有很强约束性的特征,在物体的三维重建和识别中可作为一个重要的约束条件。

2.4 光滑局部对称

光滑局部对称是寻找平面曲线的对称性,其对称轴是一条光滑曲线。假设曲线的参数方程为 $c(s) = (x(s), y(s))$, 取曲线上两点 $c(s_1), c(s_2)$, 在此两点的曲线单位切矢量分别记为 $\hat{t}_1(s)$ 和 $\hat{t}_2(s)$, $c(s_1), c(s_2)$ 的连线记为矢量 $\vec{r}(p_1, p_2)$ 。如果有 $\vec{r}(p_1, p_2) \cdot (\hat{t}_2(s_2) - \hat{t}_1(s_1)) = 0$, 则称 $c(s_1)$ 和 $c(s_2)$ 是局部对称的, 所有局部对称点的连线中点形成一条光滑曲线, 则称该图像曲线为光滑局部对称。光滑局部对称在目标匹配、识别、图像压缩等领域都有重要应用, 如利用图像的光滑局部对称轴实现匹配识别更为简单有效。

2.5 平行对称

令两条曲线的参数方程分别为 $c_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ 和 $c_2(s) = (x_2(s), y_2(s))$, $\theta_1(s)$ 和 $\theta_2(s)$ 分别是此两条曲线的切线矢量函数, 如果存在一连续单调函数 $f(s)$, 使得 $\theta_1(s) = \theta_2(f(s))$, 则称曲线 $c_1(s)$ 和 $c_2(s)$ 是平行对称的。

2.6 平移对称

给定一幅图像 $f(x, y)$, 一直线 l 将图像分为两部分 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$, 如果对图像 $f_1(x, y)$ 上任一点 (x_1, y_1) , 即在图像 $f_2(x, y)$ 上存在一点 (x_2, y_2) , 使 $f_1(x_1, y_1) = f_2(x_2 + l, y_2 + m)$, 则称图像 $f(x, y)$ 为平移对称, 其中 l, m 为常数。

3 对称性检测方法

近几十年来, 国内外文献提出了大量的对称性检测方法, 根据它们所采用的数学思想, 主要可分为模式匹配法、优化搜索法、统计方法、曲线微分法等。

3.1 模式匹配法

这种方法的思想是将平面图形的对称性检测转化为点的连接问题。文[5]提出的方法就是一种典型的用模式匹配法检测镜像对称性问题。假设图像由一组点 p_1, p_2, \dots, p_n 组成, 其中心记为 c , 坐标原点记为 o , 则易得 c 的坐标矢量为 $\vec{oc} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \vec{op}_i$, 而图像点的对称轴 sp 必通过点 c , 因而关于 sp 的一对对称点到中心点 c 的距离 (d) 必是相等的。据此, 首先将这些点分为 k 组: E_1, E_2, \dots, E_k 使得每一组 E_i 的点到点 c 距离都是相等的, 然后对每一组 E_i , 寻找 sp , 使其通过 c 点且关于 sp 成称镜像对称, 最后求得所有的 sp_i 的交集 sp 即为该组图像点的对称轴。

这种模式匹配方法只能检测镜像对称, 对精确对

称的某些形状的几何体, 如点、圆、椭圆等组成的图像较为有效, 但是对于灰度图像等大多数图像, 由于成像、数字化等产生误差, 因而这种方法无法应用, 而且其计算复杂度也较高。

3.2 优化搜索方法

优化搜索方法是通过定义某种对称性度量, 把对称问题转化为优化搜索问题, 如 Marola 用镜像对称系数来表征物体的对称程度, 并在实际的对称轴附近采用极大化方法寻优^[6], Gilat 提出了一种 Chiral Coefficient 度量来表示物体偏离镜像对称的程度, 结合误差最小化方法求解^[7]。这些方法只能检测对称性的某一种类型, Zabrodsky 通过图像的对称性变换定义了对称距离^[8], 然后最小化对称性距离以此检测物体的对称性, 这种方法能同时检测镜像对称和旋转对称。

假设给定有 n 个点 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 组成的图像, 对这些图像点作 m 次旋转对称变换, 其步骤为:

(1) 计算出点组 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 的中心点 c , 然后绕点 c 将 p_i 逆时针旋转 $2\pi i/n$ 得 \tilde{p}_i 。

(2) 计算点组 $\{\tilde{p}_i\}_{i=1}^n$ 的平均得点 \hat{p}_0 。

(3) 将点 \hat{p}_0 绕 c 顺时针旋转 $2\pi i/n$ 得点组 $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^n$ 。

点组 $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^n$ 即是点组 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 的对称变换, 计算对称

距离 $SD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|p_i - \hat{p}_i\|^2$, 调整 n 的大小, 获得最小化 SD 即可检测出图像的对称性及对称轴, 显然当 $n=2$ 时, 即为镜像对称。

优化搜索方法适用范围广泛, 对大多数图像都可以检测出其对称性, 但是它要求对称点对的精度仍然很高, 而且对称性度量函数的单峰性难以保证, 需要好的粗定位技术和复杂的全局寻优方法。

3.3 统计方法

优化方法和模式匹配方法都要求对称图像点精确对称, 而且它们对噪音敏感, 由于物体图像在成像、数字化以及边缘检测等处理过程中会产生很多误差, 显然, 这些方法并不适用图像的对称性检测, 统计方法由于反映图像的整体统计特征, 因此能克服噪音等影响。文[9]提出了基于主元分析的对称性检测方法。

设图像点集 $\{p_i\}_{i=1}^n$, 而这 n 个点形成一个 $n \times 2$ 的矩阵, $M = [p_1, p_2, \dots, p_n]$, 计算 $M^T M$ 的最大特征值对应的特征向量, 该向量方向即为图像对称轴方向。这种方法能较为简单地确定对称轴, 但是必须进行对称性验证以确定该图像是否是对称的, 而且由于统计的特点, 该方向并不一定很精确, 需要在该方向附近进行优化处理以精确定位。

文[10]提出了广义复矩方法检测对称性, 其优点是检测镜像对称性和旋转对称性统一起来。广义复

矩的定义为 $GC_{p,q} = R_{p,q}e^{i\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r, \theta) (r^p e^{iq\theta}) r dr d\theta$, 其中, p 为非负整数, q 是正整数 $f(r, \theta)$ 为图像的函数表示, 通过判断广义复矩非零的第一、第二和第三阶复矩所对应的阶数, 即可判断对称性, 检测出镜像对称轴和旋转对称轴。这种方法计算量较大, 而且由于矩反映图像的整体特征, 对缺失部分物体信息的图像将无法进行对称性检测。

3.4 曲线微分法

曲线的几何性质能较为直观地反映图像的形状特征, 所以, 基于曲线的微分性质检测图像的对称性是一个较为有效的方法。文[11]提出了一种基于曲线微分性质的斜对称检测方法。

假设一图形由曲线组成, 其参数方程形式为 $x(t), y(t)$, t 为其参变量, 直线 l 是其中一条斜对称轴, 点 $p_1[x(t_1), y(t_1)]$ 与点 $p_2[x(t_2), y(t_2)]$ 是关于直线 l 的一对斜对称点, 那么存在如下关系

$$k = \left[\frac{d^2x(t_1)}{dt^2} \frac{dy(t_1)}{dt} - \frac{d^2y(t_1)}{dt^2} \frac{dx(t_1)}{dt} \right] = c_0 \left[\frac{d^2x(t_2)}{dt^2} \frac{dy(t_2)}{dt} - \frac{d^2y(t_2)}{dt^2} \frac{dx(t_2)}{dt} \right] \quad (1)$$

其中, c_0 为常数。由此易得, 如果曲线的二阶导数存在, 则斜对称轴和曲线的交点处有 $k=0$, 否则在该点将有一局部极值。对于离散的图形曲线点, 用离散点的一阶和二阶差分表示一二阶导数, 显然这种方法对图像的噪音敏感。文[12]提出用二次 B 样条曲线拟合图像曲线点来检测对称性, 这种方法在一定程度上克服了噪音的影响, 但是对缺失部分信息的图像仍然无法检测对称性。文[2]用直线段逼近图形曲线, 然后用 Delaunay 三角化剖分, 根据对偶原理构成 Voronoi 图, 以求取曲线的局部平滑对称轴, 显然, 线段的逼近受拐角点选取的影响。

4 基于隐含多项式曲线的对称性检测

自90年代以来, 隐含多项式曲线曲面用作为描述物体的几何模型越来越受到重视, 理论与实践都表明隐含多项式曲线对物体的描述具有许多优点^[13], 这主要因为: (1) 可用少量隐含多项式曲线方程的系数即可描述不规则的复杂物体; (2) 对描述物体的数据集合用隐含多项式曲线曲面拟合效率高, 用来识别目标速度快; (3) 隐含多项式曲线描述物体, 其系数对噪音不敏感; (4) 隐含多项式曲线能够填充由于物体的遮挡所丢失的部分信息。

隐含多项式的形式为: $f_n(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$ 。当描述三维几何图形时, 多一个自变量 z , 该隐含多项式的零集合, 即 $\{(x, y) | f_n(x, y) = 0\}$ 可以表达一个二维图形的形状。利用二次曲线来识别物体已得到

广泛应用, 而高次隐含多项式曲线由于比二次曲线有更强的描述复杂物体的能力, 近年来受到极大的关注。它们的优点在于只要用很少的系数就可以较精确地描述物体, 而且抗噪性强, 并能描述缺失部分物体信息的目标, 计算量也较小, 算法简单。

显然, 隐含多项式函数曲线有良好的微分性质, 简明的解析式, 通过研究隐含多项式的特征, 可以把镜像对称、斜对称、光滑局部对称和旋转对称等对称性检测统一起来, 将图像的对称性检测转化为对隐含多项式曲线的对称性研究。

4.1 基于曲线拐角点的对称性检测

对图像边缘进行 n 次隐含多项式曲线拟合, 得方程为 $f_n(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j = 0$, 容易得到其曲线曲率为:

$$k(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{xy} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \quad (2)$$

将曲率为零和曲率为极值的点作为拐角点, 检测这些拐角点的对称性, 从而实现图像的对称性检测。由于拐角点数一般不会很多, 因此这种方法效率是很高的。

4.2 基于曲线微分性质的对称性检测

隐含多项式曲线的对称性检测, 对于镜像对称、斜对称, 很容易根据式(1)计算出 k 的函数表达形式, 令其为零, 求解出 x, y 值, 即可确定对称轴。如果有多个解, 则可能是旋转对称, 这可通过对候选对称轴进一步验证以判断是镜像对称还是斜对称、旋转对称。

令式(1)中的 k 为零, 则有:

$$k = \left[\frac{d^2x(t_1)}{dt^2} \frac{dy(t_1)}{dt} - \frac{d^2y(t_1)}{dt^2} \frac{dx(t_1)}{dt} \right] = 0$$

即有:

$$\frac{d^2x(t_1)}{dt^2} \frac{dy(t_1)}{dt} = \frac{d^2y(t_1)}{dt^2} \frac{dx(t_1)}{dt}$$

因而 $y' = y'$, 即:

$$-\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} = -\frac{f_x}{f_y} \quad (3)$$

因而式(3)可化为

$$(f_{xx} - f_x)f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2 = 0 \quad (4)$$

其中 $f(x, y) = 0$ 为平面物体边缘的隐含多项式曲线拟合, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} 是从 $f(x, y)$ 解析式计算出一阶和二阶偏导数。解出方程(4)获得候选对称轴, 进一步验证, 即可最终确定图像的对称性。

对于光滑局部对称, 可将2.4节的数学定义推广到隐含多项式函数表达, 依据文[12]的相应方法检测出图像的光滑局部对称轴。

结论 本文给出了对称性的数学表达形式, 综述了现有的一些主要对称性检测方法, 指出这些方法都

(下转第106页)

初始化权值向量 W 及学习率因子 η_0 。

2) 计算神经网络的实际输出和期望输出之间的误差,若误差小于 ε 则结束,否则执行下一步。

3) 求每个部件的误差梯度 $\nabla f(w_k)$ 及下降方向 $d_k = -\nabla f(w_k)$

4) 调整学习率因子,对每个部件取定搜索方向,对学习率因子变量 η 求解

$$F_\eta = \min f(w_k + \eta d_k) - f(w_k) \quad (\eta \geq 0)$$

将求得的解 η 代入权值调整公式 $w_{k+1} = w_k + \eta d_k$, 转步骤2重复执行。其中 $f(w) = \frac{1}{2} \sum_j (y_j - d_j)^2$ 为神经网络的误差函数 (y_j, d_j 分别为神经网络第 j 个输出神经元的实际输出值和期望输出值)。

结论 通过在几百种单一病例和混合病例的样本集上的学习训练,系统可以对75%以上的新的掌纹病例正确地给出8种疾病的患病情况,并能正确地对其进行分类,基本达到了预期的目的。但还存在着对一些较复杂的混合病例的区分度不足等缺陷,目前考虑的解

决办法是对一些单一病例和较常见的混合病例使用神经网络的方法处理,对一些特殊的不规则的混合病例使用规则知识处理方法。

参考文献

- 1 Zhang D D. Automated Biometrics Technologies and Systems. Kluwer Academic Publishers, 2000. 111~134
- 2 Fu LiMin. Neural Networks In Computer Intelligence McGraw-Hill International Editions, 1994. 323~325
- 3 Fausseff L. Fundamentals of Neural Networks. Prentice Hall, 1994. 289~332
- 4 胡守仁. 神经网络应用技术. 国防大学出版社, 1993. 388~406
- 5 王晨霞. 现代掌纹诊病. 甘肃民族出版社, 1992. 68~85
- 6 江滨. 掌纹诊病使用大全. 北京大众文艺出版社, 1999
- 7 Winston P H. Artificial Intelligence. Addison Wesley Publishing Company, 1984. 159~200
- 8 张冰, 张基宏. 基于神经网络的专家系统规则推理系统. 模式识别与人工智能, 1998. 365~369

(上接第103页)

不能单独检测出各种对称性,而且大多数方法对噪音敏感,计算复杂,在检测效率和精确性等方面都存在不足,适用范围也较小。基于这些问题,本文提出基于隐含多项式曲线的对称性检测研究思路,它将物体的对称性检测问题转化为对隐含多项式函数的研究,而这有丰富的数学工具可以利用,我们将对此作更深入研究以期望较完美解决平面物体图像的对称性检测问题。

参考文献

- 1 Wen W, Yuan B Z. Pose estimation based on symmetry of 3-D object. In: Proc of VII European signal processing conf. Scotland, 1994
- 2 Fukushima S. Division-based analysis of symmetry and its application. IEEE Trans. On PAMI, 1997, 19(2). 144~147
- 3 Kanade T. Recovery of the 3-dimensional shape of an object from a single views. Artificial Intelligence, 1981, 17: 409~460
- 4 Zhao X, Sun J. Reconstruction of a symmetrical object from its perspective image. Computer & Graphics, 1994, 18(4): 463~467
- 5 Atallah M J. On symmetry detection. IEEE Trans. Computer, 1985, C-34(7): 663~666
- 6 Marola G. On the detection of the axes of symmetry of symmetric and almost symmetric planar images. IEEE Trans. On PAMI, 1989, 11(1): 104~108
- 7 Gilat G. Chiral coefficient-A measure of the mount of chirality. J. Phys A; Math Gen. , 1989, 22: 545~550
- 8 Zabrodsky H, Pelega S, Avnir D. Hierarchical symmetry. In: Proc. 1APR'92, III: 9~11
- 9 卢春雨, 张长水, 闻芳, 阎平凡. 基于主元分析的对称性检测. 电子学报, 1999, 27(5): 25~28
- 10 Shen D, Horace H S. IP. Symmetry detection by generalized complex (GC) moments. A close-form solution. IEEE Trans. On PAMI, 1999, 21(5): 466~475
- 11 温巍, 袁保宗. 闭合曲线的斜对称轴线的检测. 通讯学报, 1996, 17(2): 33~37
- 12 Saint-Marc P, Rom H. B-spline contour representation and symmetry detection. IEEE Trans. On PAMI, 1993, 15(11): 1191~1197
- 13 Keren D, Cooper D. Describing complicated objects by implicit polynomials. IEEE Trans. PAMI, 1994, 16(1): 38~53
- 14 Sun C, Sherrah J. 3D symmetry detection using the extended Gaussian image. IEEE Trans. PAMI, 1997, 19(2): 164~165