

# 正实数阶广义 J 集内部结构的探讨<sup>\*</sup>

Researches on Some Internal Structures of the General Julia Sets for Positive Real Index Number

王兴元 顾树生

(东北大学信息科学与工程学院 沈阳110006)

**Abstract** In order to research some internal structures of the Mandelbort set, Pickover and Hooper have advanced "epsilon cross" and "star trails" methods, respectively. This paper expands these two methods, and gives out a series of internal structures images of the general Julia sets for positive real index number. The fractal characteristics and the evolutions of internal structures of the general Julia sets are analyzed.

**Keywords** General Julia sets, Internal structures, Fractal

## 1 引言

复映射  $f: z \mapsto z^2 + c$  ( $a=2$ ) 对不同的  $c$  值 ( $c \in C$ ), 经过迭代能生成各种形状奇特的分形, 这些集合被称为 Julia 集。而如果根据不同的  $c$  值对应的 Julia 集的连通性对参数  $c$  进行分类, 还可在参数空间做出称为 Mandelbort 集的  $c$  的点集<sup>[1]</sup>。目前人们对 Julia 集已进行了深入研究, 发现其中深藏着规律性的结构, 从而大大丰富了分形理论<sup>[2]</sup>。在此基础上作者探讨了  $a \in R$  时广义 J 集的结构特征, 给出了广义 J 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律<sup>[3,4]</sup>。然而在上述研究中广义 J 集的内部结构却被忽视, 通常以黑色来表示, 能否通过修改构造广义 J 集的经典算法, 显示出广义 J 集的内部结构呢? 加拿大数学家 Pickover 和美国学者 Hooper 曾分别提出了  $\epsilon$  正交法和星迹法, 用来研究 Mandelbort 集的内部结构<sup>[5,6]</sup>。作者将他们的方法进行了推广, 给出了  $a > 0$  时广义 J 集的内部结构图, 并研究了正实数阶广义 J 集内部结构的分形特征及演化过程。

## 2 方法与结果

**定义 1** 设  $f: z \mapsto z^a + c$  ( $a \in R$ ) 为黎曼球  $C$  上的复映射,  $F_f$  表示  $C$  中那些轨道不收敛到无穷大点的点  $z$  的集合, 即:

$$F_f = \{z \in C: \{|f^n(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ 是有界的}\}$$

称此集为相应于  $f$  的充满的广义 J 集,  $F_f$  的边界称为复映射  $f$  的广义 J 集, 记为  $J_f$ , 即

$$J_f = \partial F_f$$

该定义是绘制充满的广义 J 集  $F_f$  计算机图像的逃逸时间算法的出发点<sup>[3]</sup>。

观察广义 J 集内部结构的方法是基于检测构造广义 J 集逃逸时间算法的内循环的每一次迭代结果; 设初始点为  $z_0$ ,  $z_0$  经内循环迭代将在复平面上产生一点  $z$ 。当内循环连续迭代时,  $z$  点将在复平面上运动, 用不同的方法去分析  $z$  点的运动轨迹, 可得到广义 J 集不同的内部结构图。

### 2.1 $\epsilon$ 正交法

$\epsilon$  正交法为在构造广义 J 集算法的内循环的结尾处增加了一个检查  $z$  点位置的测试。如经过  $n$  ( $n < N$ ,  $N$  为逃逸时间限制) 次迭代后,  $z$  点落在 X 轴或 Y 轴上, 将退出内循环, 并根据  $z$  点的位置, 赋予其初始点  $z_0$  以不同的颜色。  $\epsilon$  为定义一误差范围的变量。如经迭代后,  $z$  点落在距 X 轴的距离小于  $\epsilon$  的区域内, 则认为  $z$  点落在 X 轴上, 赋予  $z_0$  点为黄色; 若经迭代后,  $z$  点落在距 Y 轴的距离小于  $\epsilon$  的区域内, 则认为  $z$  点落在 Y 轴上, 赋予  $z_0$  点为绿色。一般  $\epsilon \in [0.01, 0.05]$ , 其大小的选取依赖于显示倍率而定。选取  $\epsilon = 0.05$ 、逃逸半径  $R = 30$ 、逃逸时间限制  $N = 100$  且复常数  $c = 0.5 + 0.5i$ , 作者绘制了  $a > 0$  时的广义 J 集的内部结构图。令  $a = \eta + \epsilon$ , 其中  $\eta$  是正整数,  $\epsilon$  为正小数。根据图形结构特点, 可分两种情况来研究。

#### 2.1.1 $a = \eta$

图 1a~1c 为由  $\epsilon$  正交法得到的  $a = \eta$  时的广义 J 集的内部结构图, 其类似  $\eta$  个主要花瓣 (简称主瓣) 组

<sup>\*</sup> 本文得到国家自然科学基金 (编号: 69974008)、中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金 (编号: 972194) 资助。王兴元 博士后、副教授, 主要研究方向为混沌与分形理论及其在生物医学工程中的应用。顾树生 教授, 博士生导师, 主要研究方向为控制理论与控制工程。

成的花朵,图中黑色为稳定区  $F_s$ ,白色为不稳定区  $\overline{F_s}$ ,黄色和绿色区域是由内循环迭代所产生  $z$  点的位置决

定的,将部分放大图1d与图1a比较,可见广义J集的内部结构具有相似性。

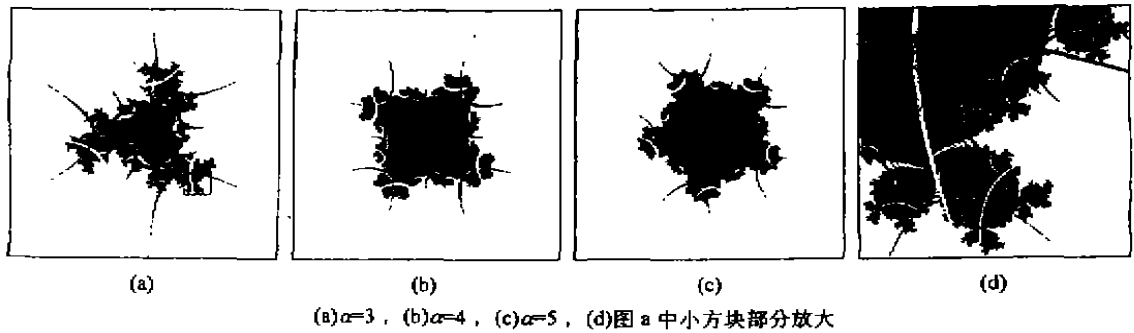


图1 由  $\epsilon$  正交法得到的正整数阶广义J集内部结构

**定理1** 利用  $\epsilon$  正交法由复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha \in R)$  构造广义J集的内部结构,有:

$$f^k(z) = f^k(z e^{2\pi i j / \alpha}) \quad (k, j \text{ 均为整数, 且 } 1 \leq k \leq N, 0 \leq j \leq |\alpha| - 1)$$

证明: 利用数学归纳法

$$\because f^1(z e^{2\pi i j / \alpha}) = (z e^{2\pi i j / \alpha})^\alpha + c = z^\alpha e^{i 2\pi j} + c = z^\alpha + c = f^1(z)$$

故可设  $f^k(z) = f^k(z e^{2\pi i j / \alpha})$  成立

$$\text{又} \because f^{k+1}(z e^{2\pi i j / \alpha}) = f^k[f(z e^{2\pi i j / \alpha})] = f^k[f^1(z)] = f^{k+1}(z)$$

故命题真。定理1说明若  $z \in F_s$ , 则  $z e^{2\pi i j / \alpha} \in F_s$ 。可见  $\alpha$  为正整数的广义J集的内部结构在以原点为顶点夹角为  $2\pi/\alpha$  的区域生成后,再旋转  $(\alpha-1)$  次  $2\pi/\alpha$  弧度即可获得,所以  $\alpha$  为正整数的广义J集的内部结构为中心在原点的对称结构。

**定理2** 利用  $\epsilon$  正交法由复映射  $f: z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha = \eta)$  构造广义J集的内部结构,若复数  $c$  的相角为  $\varphi$ ,则主瓣中心的极坐标  $(r, \theta)$  为

$$\begin{cases} r = |c|^{1/\alpha} \\ \theta = [\varphi + (2m+1)\pi]/\alpha \end{cases} \quad (m \text{ 为整数, 且 } 0 \leq m \leq \alpha - 1)$$

该定理的证明可参考文[3]。

### 2.1.2 $\alpha = \eta + \epsilon$

图2为  $\alpha = \eta + \epsilon$  时广义J集的内部结构图,它类似  $\eta-1$  个主瓣及部分花瓣(简称雏瓣)组成的不对称花朵,并随  $\epsilon$  的增大,雏瓣不断发育而演化成为一个完整主瓣[图2a~2c]。上述演化规律可解释为由复映射

$$z \leftarrow z^\alpha + c (\alpha > 0) \quad (1)$$

构造广义J集的内部结构,对  $z^\alpha$  的计算,采用了DeMoivre理论

$$z^\alpha = r^\alpha (\cos \alpha \theta + i \sin \alpha \theta) \quad (2)$$

由式(1)的每一次迭代,  $z$  都从直角坐标转换到极坐

标,以便计算  $z^\alpha$ ,然后再转换回直角坐标与复常数  $c$  进行相加。但从复平面的直角坐标  $(x, y)$  转换到极坐标  $(r, \theta)$ ,相角  $\theta$  的范围一般可选取以下四种情况之一:  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi)$ ,  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$  和  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ 。当  $\alpha = -\eta$  时,将不会影响式(2)的使用,因

$$\begin{cases} \cos(\alpha\theta) = \cos(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin(\alpha\theta) = \sin(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

但  $\alpha = \eta + \epsilon$  时,则式(3)不成立,故  $\theta$  范围的不同选取将导致广义J集内部结构的不同演化。由定理2可知一个完整的主瓣中心的相角为  $(\pi + \varphi)/\alpha$ ,若属于这个主瓣所有点的最大和最小相角分别用  $\theta^+$  和  $\theta^-$  来表示,则

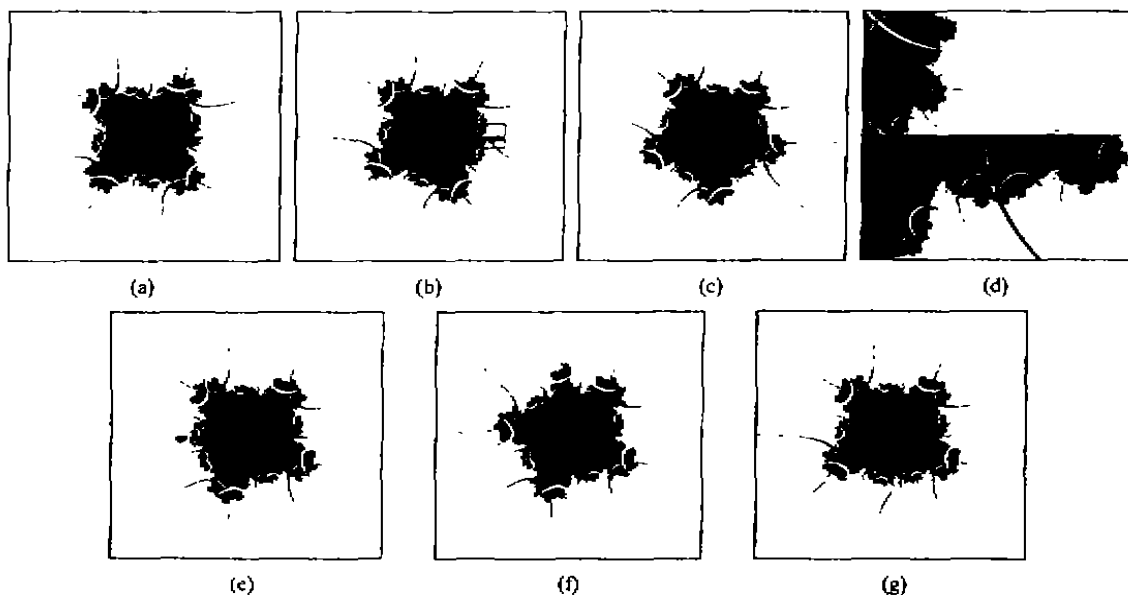
$$\theta^\pm = (\pi + \varphi)/\alpha \pm \pi/\alpha$$

再由定理1可知,我们可利用这个主瓣通过按顺时针或逆时针方向旋转  $\alpha-1$  倍的  $2\pi/\alpha$  弧度来获得广义J集内部结构的其余主瓣,而上述相角  $\theta$  的选取在正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴处的不连续性,将不允许这个主瓣通过正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴,这就导致穿过  $x$  或  $y$  轴(从2个方向)主瓣的部分消失,出现了雏瓣,且仅出现在相角  $\theta$  不连续的正  $x$ 、正  $y$ 、负  $x$  或负  $y$  轴处。下面以选取相角  $\theta \in [0, 2\pi)$  为例[图2a~2c],来定量说明这一现象。当某一完整的主瓣穿过正  $x$  轴时,如果有正整数  $n$  和  $n'$  满足:

$$(1) \theta^+ + 2\pi n/\alpha > 2\pi > \theta^- + 2\pi n/\alpha$$

$$(2) \theta^- - 2\pi n'/\alpha < 0 < \theta^+ - 2\pi n'/\alpha$$

则将导致雏瓣的出现。对于情况(1),雏瓣出现在正  $x$  轴下方到相角为  $(\theta^- + 2\pi n/\alpha) = (\varphi + 2\pi n)/\alpha$  处;对于情况(2),雏瓣出现在正  $x$  轴上方到相角为  $(\theta^+ - 2\pi n'/\alpha) = [\varphi + 2\pi(1 - n')]/\alpha$  处。同理我们可对相角选取为另3种情况进行定量说明[图2e~2g]。由此可见,广义J集内部结构的断裂和雏瓣的出现仅当  $\alpha$  取正小数时,部分放大图2d也证明了上述观点,并可见



(a) $\alpha=4.2$ , (b) $\alpha=4.5$ , (c) $\alpha=4.8$ , (d)图 b 中小方块部分放大, 以上四图相角 $\theta \in [0, 2\pi)$ ;  
(e) $\alpha=4.5$ , 相角 $\theta \in [-\pi, \pi)$ ; (f) $\alpha=4.5$ , 相角 $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ ; (g) $\alpha=4.5$ , 相角 $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

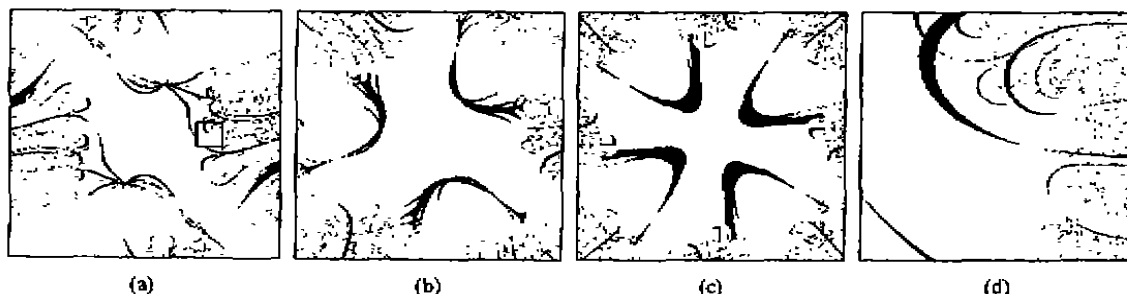
图2 由  $\epsilon$  正交法得到的正小数阶广义 J 集的内部结构

到此时广义 J 集的内部结构有某种相似性。

### 2.2 星迹法

星迹法的原理是基于经过构造广义 J 集算法的内循环的多次迭代, 初始点  $z_0$  的轨迹在复平面上的分布规律建立的。 $z_0$  点的轨迹的分布规律是以若干组点群

的方式分布于广义 J 集的内部或外部, 其中每组点群中可能包含一个或几个点串, 由几个点串构成一组点群时, 内循环的每一次迭代都给某一点串增加了一个点, 增加的方式是以一连续轨道从一个点串跳到另一点串, 点群中点串数量的变化依赖于  $z_0$  位置的选取。



(a) $\alpha=2$ , (b) $\alpha=3$ , (c) $\alpha=4$ , (d)图 a 中小方块部分放大

图3 由星迹法得到的正整数阶广义 J 集的内部结构

为了清晰地分辨出各个点串, 应使内循环的迭代次数  $N$  较小, 作者选取  $N$  为 16。另外作者假设这些点串不关于原点  $(0, 0)$  呈中心对称, 且任意两点串关于原点的角度也不同, 所以每个点串中任意点  $z$  的相角都是唯一, 故可用的相角的正切值去确定  $z$  点的位置。利用  $z$  点的实部  $\text{Re}(z)$  和虚部  $\text{Im}(z)$  求出复数  $z$  的相角的正切值, 将它存入表  $\text{Tantable}(M)$  ( $M=0, 1, \dots, 15$ ) 中以便使用。完成内循环后, 进入比较循环即把表中第

一个值  $\text{Tantable}(0)$  和其余的每一个值相比较。例如: 如比较结果显示表中第四个值  $\text{Tantable}(3)$  和第一个值  $\text{Tantable}(0)$  不等, 且两者相差的绝对值  $\text{Diff}$  小于 0.05, 则将返回第一个点串且能推断出在该点群中将会有三个点串出现, 同时退出比较循环; 再根据比较循环的迭代次数 3, 赋予初始点  $z_0$  相应的颜色, 即可得到广义 J 集的内部结构图。为了提高图形的分辨率, 还可适当减小  $\text{Diff}$  的值。星迹法由于降低了内循环的迭代次

数的值,所以作图时间大大地减少了。选取复常数  $c = 0.3 + 0.3i$ , 作者利用星迹法构造了广义J集的内部结构图。

2.2.1  $\alpha = \eta$

图3a~3c 为用星迹法得到的  $\alpha = \eta$  时的广义J集



(a)

(b)

(c)

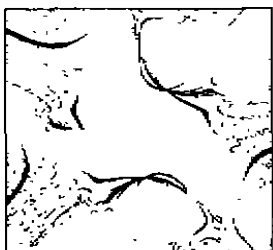
内部结构图,其类似  $\eta$  个雪花瓣组成的雪花。由定理1可知其具有  $\eta$  倍的旋转对称性。局部放大图3d 中出现了具有分形性质的精细结构。

2.2.2  $\alpha = \eta + \epsilon$

图4为用星迹法得到的  $\alpha = \eta + \epsilon$  时广义J集的内



(d)



(e)



(f)



(g)

(a) $\alpha=2.2$ , (b) $\alpha=2.5$ , (c) $\alpha=2.8$ , (d)图 b 中小方块部分放大, 以上四图相角  $\theta \in [0, 2\pi)$ ; (e) $\alpha=2.5$ , 相角  $\theta \in [-\pi, \pi)$ ; (f) $\alpha=2.5$ , 相角  $\theta \in [-3\pi/2, \pi/2)$ ; (g) $\alpha=2.5$ , 相角  $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$

图4 由星迹法得到的正小数阶广义J集的内部结构

部结构图,其类似  $\eta$  个完整雪花瓣及位于正  $x$ 、负  $x$ 、正  $y$  或负  $y$  处的一个部分雪花瓣组成的雪花,并随  $\epsilon$  的增大,部分雪花瓣不断发育而演化成为一个完整雪花瓣 [图4a~4c、图4e~4g]。此时广义J集的内部结构特征及演化,可参见作者对用  $\epsilon$  正交法得到的  $\alpha = \eta + \epsilon$  时广义J集的内部结构的解释。由部分放大图4d,可见到具有分形性质的精细结构。

**结论** 上述研究在观察正实数阶广义J集内部结构的方法上给出了一个方向性的指导,通过对广义J集算法进行简单的修改,可得到不同的广义J集新的图像,从这个新的图像中作者观察到了广义J集的内部结构的分形特征及演化过程。 $\epsilon$  正交法和星迹法给出了如何从广义J集的内部区域提取有趣图形的方法,对这两种方法的每一种做些简单的限制或修改,可

对广义J集的内部区域进行进一步探索。如星迹法,代替查找复数  $z$  相角的正切值,可将  $z$  的实部  $Re(z)$  和虚部  $Im(z)$  存入表中作类似处理,可给出新的图像。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Francisco:Freeman W H,1982. 1~10
- 2 Peitgen H O, Saupe D. The science of fractal images. Berlin:Springer-Verlag,1988. 137~218
- 3 王兴元,朱伟勇. 正实数阶广义J集的嵌套拓扑分布定理. 东北大学学报(自然科学版),1999,20(5):489~492
- 4 王兴元,顾树生. 负实数阶广义J集的演化. 中国图象与图形学报(已录用,待发表)
- 5 Pickover C A. Computers, pattern, chaos and beauty. New York:St. Martin's Press,1990. 3~69
- 6 Hooper K J. A note on some internal structures of the Mandelbrot set. Computers & Graphics,1991,15(2):295~297