计算机科学2001Vol.28№4

有限自动机研究的矩阵模型方法

Matrix Model Method for Researches on Finite Automata

朱征宇　朱庆生

（重庆大学计算机学院　重庆400044）

Abstract　Based on the references [1]～[3], a new mathematical model for finite automata, matrix model, is built up in this paper. Matrix model offers a new method for researches on finite automata. It not only makes matrix theory and Boolean matrix theory can be used fully into researches of finite automate, but also has a new feature that is suitable to be handled on computer. The researches on graph theory, control theory and linear finite automata theory show us that a lot of new results will be got and a good progress will be made in researches of finite automata if the new matrix model method is used.

Keywords　Finite automata, Matrix model

1　引言

随着现代科学技术的发展，有限自动机已成为许多学科的重要的理论和应用基础。然而近年来有限自动机理论发展缓慢，不能适应这些学科发展的需要。为了促进有限自动机研究的发展，本文中给出了矩阵模型方法。

早在50年代，受图论研究的影响，人们就考虑过试图采用矩阵工具研究有限自动机[1]，80年代主要以时序线路测试为目的，从线路的具体结构函数出发，建立了时序机的矩阵模型，然而它更重要的价值在于启发我们将其推广到一般有限自动机，对有限自动机的理论研究产生重要影响。

本文在文[1～3]基础上，讨论建立了一般有限自动机的矩阵模型，对有限自动机 M—〈I,O,S,δ,λ〉，直接从状态流程表出发，而不是依赖于线路的结构函数，通过引入 I（输入集）、O（输出集）和 S（状态集）的布尔量表示，将 δ（状态转移映射）和 λ（输出映射）换用矩阵形式的映射方程描述，即得到 M 的矩阵模型表示。在讨论之前先给出：

定义1　设 M—〈I,O,S,δ,λ〉为有限自动机，如果对任何 x∈I 和任何 s∈S，都有 δ(s,x) 和 λ(s,x) 唯一确定，则称 M 为完全定义的确定性有限自动机。

约定：本文中讨论的有限自动机 M 均指定义1中的机器。

2　I、O 和 S 的布尔量表示

2.1　输出集 O

将集 O 的元素任意排定一序，设为 $o_1, o_2, \cdots\cdots, o_p$；则 O 可用布尔变量集

$$z=\{z_1, z_2, \Lambda, z_p\}$$

表示，$z_i=1$ 表示 o_i，$i=1,2,\cdots,p$。

由于任何时刻，M 的输出唯一确定性（定义1），要求 z 集满足正交性（式中＋和·为布尔加和乘运算）：

$$\begin{cases} z_1+z_2+\Lambda+z_p=1 \\ z_h \cdot z_y=0 \end{cases} \quad h\neq y; 1\leqslant h, y\leqslant p$$

2.2　状态集 S

与 O 类似地，S 的元素任排定一序：$S_1, S_2, \cdots, S_n$，用布尔变量集

$$Q=\{Q_1, Q_2, \Lambda, Q_n\}$$

表示 S，$Q_i=1$ 表示状态 S_i，$i=1,2,\cdots,n$。

同样，由于任何时刻 M 所处状态是唯一确定的（定义1），要求 Q 满足正交性：

$$\begin{cases} Q_1+Q_2+\Lambda Q_n=1 \\ Q_i \cdot Q_y=0 \end{cases} \quad i\neq y, 1\leqslant i, y\leqslant n$$

2.3　输入集 I

设 I 有 r 个元素，则有自然数 L 使：

$2^{L-1}\pi r\pi 2^L$，

任取集合：

$$X=\{(a_1, a_2, \Lambda, a_L) \mid a_i=0,1; i=1,2,\Lambda,L\}$$

的 r 个元素，设作成的子集为 X_0，然后按任意的方式 φ 将 X_0 与 I 一一对应，于是可以用 X_0 表示 I，而用 $x=(x_1, x_2, \Lambda, x_L)$ 表示输入变量：

"$x_0=(a_1, a_2, \Lambda, a_L)\in X_0$ 表示 $\varphi(x_0)\in I$"

显然，对任何输入 $x_0=(a_1, a_2, \Lambda, a_L)$ 有

$$x=x_0 \Leftrightarrow x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \Lambda x_L^{\alpha_L}=1 \tag{1}$$

其中：$x_i^{\alpha_i}=\begin{cases} x_i & \alpha_i=1 \\ \bar{x}_i & \alpha_i=0 \end{cases} \quad i=1,2,\Lambda,L$

虽然一般地，I 的元素数目未必恰为2的方幂，从而 X_0为 X 的真子集，但为了以后讨论的方便，且不失一般性，以下讨论约定 I 的元素数目恰为2的方幂，从而 $X_0=X$，故以下一律用 X 表示输入集。

3 矩阵模型

由于 I、O 和 S 采用了布尔量表示，从而可以用布尔函数矩阵描述映射 d 和 λ，得到 M 的矩阵模型表示，详细讨论如下：

对每个 $Q_{j_0}(1\leqslant j_0\leqslant n)$作布尔函数和式

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \Lambda x_L^{\alpha_L} Q_i \tag{2}$$

其中每一单项中的 $x_0=(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_L)$和 Q_i 满足

$d(Q_i,x_0)=Q_{j_0}$

而 Σ 是对满足以上关系的所有 $x_0\in Z$ 和 Q_i 取布尔和。

由(1)式，易知对任何 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\Lambda,x_L^0)\in Z$ 和任何 Q_i，M 是否对输入 x_0以状态 Q_i 转到 Q_{j_0}，取决于和式(2)在 $x=x_0$和 $Q_i=1$时的值是否为1(注意到 Q 的正交性)。可见布尔方程：

$Q_{j_0}=\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \Lambda x_L^{\alpha_L} Q_i$

整理：$Q_{j_0}=b_{j_0 1}(x)Q_1+b_{j_0 2}(x)Q_2+\Lambda b_{j_0 n}(x)Q_n \quad (3)$

即反映了 M 对输入 x 是否以状态 Q_i 转到 Q_{j_0}的判定条件。这里 $b_{j_0 p}(x)(p=1,2,\cdots,n)$是关于 $x=(x_1,x_2,\Lambda,x_L)$的布尔函数。

取 $j_0=1,2,\Lambda,n$，由(3)就得到 n 个布尔方程，用矩阵形式表示为：

$$Q=B(x)\times Q \tag{4}$$

其中'x'定义为布尔函数环上按通常数字矩阵的乘法规则相乘，B(x)为布尔函数矩阵，而

$$Q=\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ M \\ Q_n \end{bmatrix} \quad B(x)=\begin{bmatrix} b_{11}(x)b_{12}(x)\Lambda b_{1n}(x) \\ b_{21}(x)b_{22}(x)\Lambda b_{2n}(x) \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ b_{n1}(x)b_{n2}(x)\Lambda b_{nn}(x) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

简记 $B(x)=[b_{ij}(x)]_{n\times n}$

类似地可以从输出映射 $\lambda(Q_i,x)$出发，导出描述 λ 的布尔方程：

$$Z=A(x)\times Q \tag{5}$$

其中 $A(x)$为关于 $x=x(x_1,x_2,\Lambda,x_L)$的 p×n 阶布尔函数矩阵，而

$$z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ M \\ z_p \end{bmatrix} \quad A(x)=[a_{ij}(x)]_{p\times n}$$

定义2 如上得到的(4)和(5)式，即

$$\begin{cases} Z=A(x)\times Q \\ Q=B(x)\times Q \end{cases} \quad x\in X \tag{6}$$

称为有限自动机 M 的矩阵模型。

从推导过程可知，M 的矩阵模型完全描述了 δ 和 λ，从而完全确定了 M。

4 例子

设有限自动机 M 的状态流程表如下：

(δ,λ) X/I ; Q S	00 i_1	01 i_2	10 i_3	11 i_4
Q_1 S_1	(S_2,o_1)	(S_3,o_2)	(S_5,o_1)	(S_2,o_2)
Q_2 S_2	(S_3,o_2)	(S_1,o_1)	(S_4,o_1)	(S_4,o_3)
Q_3 S_3	(S_4,o_3)	(S_3,o_3)	(S_3,o_1)	(S_1,o_1)
Q_4 S_4	(S_4,o_3)	(S_3,o_1)	(S_4,o_1)	(S_5,o_2)
Q_5 S_5	(S_4,o_2)	(S_2,o_1)	(S_4,o_1)	(S_4,o_3)

I 和 S 的布尔量表示也列入表中，$O=\{o_1,o_2,o_3\}$的布尔量表示为 $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$，于是

$$\begin{cases} Q_1=\bar{x}_1\bar{x}_2Q_2+x_1x_2Q_3+\bar{x}_1x_2Q_4 \\ Q_2=(\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1\bar{x}_2)Q_1+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_5 \\ Q_3=\bar{x}_1x_2Q_1+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_2+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_3 \\ Q_4=(x_1\bar{x}_2+x_1x_2)Q_2+\bar{x}_1x_2Q_3+(x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_2) \\ \qquad Q_4+(\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1\bar{x}_2+x_1x_2)Q_5 \\ \quad =x_1Q_2+\bar{x}_1x_2Q_3+\bar{x}_2Q_4+(x_1+\bar{x}_2)Q_5 \\ Q_5=x_1\bar{x}_2Q_2+x_1x_2Q_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1=(\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1\bar{x}_2)Q_1+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_2+(x_1\bar{x}_2+x_1x_2) \\ \qquad Q_3+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_4+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_5 \\ \quad =\bar{x}_2Q_1+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_2 \\ \qquad +x_1Q_3+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_4+(\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2)Q_5 \\ Z_2=(\bar{x}_1x_2+x_1x_2)Q_1+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_2+x_1x_2Q_4+\bar{x}_1x_2Q_5 \\ \quad =x_2Q_1+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_2+x_1x_2Q_4+\bar{x}_1x_2Q_5 \\ Z_3=x_1x_2Q_2+(x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2)Q_3+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_4+x_1x_2Q_5 \\ \quad =x_1x_2Q_2+\bar{x}_1Q_3+\bar{x}_1\bar{x}_2Q_4+x_1x_2Q_5 \end{cases}$$

从而 M 的矩阵模型为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2 & x_1 & \bar{x}_1x_2+\bar{x}_1x_2 & \bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2 \\ x_2 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & 0 & x_1x_2 & \bar{x}_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_1x_2 & x_1x_2 & \bar{x}_1x_2 & 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2 & 0 & 0 & 0 & \bar{x}_1\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1x_2 & \bar{x}_1\bar{x}_2 & \bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & \bar{x}_1x_2 & \bar{x}_2 & x_1+\bar{x}_2 \\ x_1\bar{x}_2 & 0 & 0 & x_1x_2 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

5 基本性质

从(4)和(5)式的建立过程及定义1有下列性质成立:

性质1 (A(x)和B(x)的物理意义)对任何 $x_0 \in X$ 有:i)若 $b_{ij}(x_0)=1$,则M对输入 x_0 将从状态 Q_j 转移到 Q_i;ii)若 $a_{ij}(x_0)=1$,则M对输入 x_0,当处于状态 Q_j 时,将输出 Z_i。

性质2 对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 都有:i)B(x)的第k列的元素的布尔和恒为1,即 $b_{1k}(x)+b_{2k}(x)+\Lambda+b_{nk}(x)\equiv 1, x\in X$;ii)A(x)的第k列的元素的布尔和恒为1,即 $a_{1k}(x)+a_{2k}(x)+\Lambda+a_{pk}(x)\equiv 1, x\in X$。

性质3 对每个 $x_0\in X$,和每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 都有:i)$B(x_0)$ 的第k列的元素中,有且仅有一个元素为1,其余的全为0;ii)$A(x_0)$ 的第k列的元素中,有且仅有一个元素为1,其余的全为0。

性质3可从性质1及定义1推出。

虽然模型建立时依赖于O和S'的元素排列次序,但关于不同排序而得到的模型有如下的关系:

定理1 *S'的元素不同排序对应于分别对B(x)作相应的对称变换和A(x)作相应的列变换;而O的元素不同排序对应于A(x)作相应的行变换。*

由模型建立的过程即可证明定理。

最后指出,有限自动机与布尔函数矩阵之间有着密切的对应关系。任何一个有限自动机,都可以通过(6)对应于两个布尔函数矩阵A(x)和B(x),它们满足性质2和3,反过来可以证明:

定理2 任何 $p\times n$ 布尔函数矩阵A(x)和 $n\times n$ 布尔函数矩阵B(x),只要它们满足性质2和3,则有有限自动机M存在,使M的矩阵模型为:

$$\begin{cases} Z=A(x)\times Q \\ Q=B(x)\times Q \end{cases} \quad x\in X \tag{7}$$

而 $X=\{(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\alpha_L)\mid \alpha_i=0,1;i=1,2,\Lambda,L\}$。这里假设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_L)$ 为L维布尔矢量。而 $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_P)'$,$Q=(Q_1,\cdots,Q_n)'$,这里'表示矩阵转置变换。

证明:作有限自动机 $M=\langle I,O,S,\delta,\lambda\rangle$ 如下

$I=X$, $Q=\{o_1,o_2,\cdots,o_p\}$, $S'=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$

其中O和S'是任取的P元素集和n元素集,而δ和λ分别由B(x)和A(x)定义如下:

设 $B(x)=[b_{ij}(x)]_{n\times n}$, $A(x)=[a_{ij}(x)]_{p\times n}$。对任何 $s_j\in S$, $x_0\in X$,因为B(x)和A(x)满足性质2和性质3,$B(x_0)$ 和 $A(x_0)$ 的第j列元素中都有且仅有一个元素为1,设分别为 $b_{ij}(x_0)=1$ 和 $a_{kj}(x_0)=1$,定义:

$$\begin{cases} \delta(Q_j,x_0)=Q_i \\ \lambda(Q_j,x_0)=Q_k \end{cases}$$

仿前一节的例子,易求得这样定义的有限自动机M的矩阵模型即为(7),证毕。

结束语 本文在文[1]-[4]的基础上建立了一般有限自动机的矩阵模型,为有限自动机的研究提供了新的方法。矩阵模型不但使矩阵理论和布尔矩阵理论[5]能充分地应用于有限自动机的研究,而且具有了适合于计算机处理的新特点,使讨论过程更加形式化,算法便于在计算机编程上实现,有利于促进有限自动机研究的发展。

参 考 文 献

1 Seshu S,Miller R E,Metze G. Transition Matrices of Sequential Machines. IRE Trans. Circuit Theory, 1959, 6(3):5~12
2 Even S. On Information Lossless Automata of Finite Order. IEEE Trans. Electronic Computers, 1965, 14(4): 561~569
3 Willsky A S. On the Invariability of Linear Systems. IEEE Trans. Automata Control, 1974, 19(3):272~274
4 Kim K H. Boolean Matrix Theory and Applications. Marcel Dekker INC. N. Y. ,1982
5 管纪文. 线性自动机. 科学出版社,1984
6 陶仁骥. 一种有限自动机公开钥密体制和数字签名. 计算机学报,1985,8(6):401~409
7 吕书志. 环上线性有限自动机可逆性的一些结果 计算机学报,1991,14(8):570~578

(上接第115页)

结束语 本文提出的FLASH+ASP模式的商业网站,最大特点就在于:在用户端,以漂亮且具有动感的画面—FLASH电影来吸引用户并接收必要的用户数据,再利用FLASH与ASP之间的通讯渠道,把FLASH接收到的用户数据传回服务器端的ASP,再把所有的内务交由ASP来处理。由于ASP能较好地与数据库结合,因此这种网站通过FLASH与ASP之间的数据传递还能实现FLASH电影数据的实时性,使FLASH成为真正"活"的电影,从而不需要FLASH创作人员为显示不同的数据而制作不同的FLASH动画。而且,在解决了FLASH与ASP之间的通讯问题的同时,还有助于保护FLASH电影的劳动成果。总之,本文所提出的解决FLASH与ASP之间通讯问题的方法,为FLASH+ASP模式的网站提供了技术上的支撑,具有较高的应用价值。

参 考 文 献

1 Emberton D J. FLASH 4 MAGIC. NEW RIDERS PUBLISHING. 1999
2 林金霖. ASP实务经典. 中国铁道出版社,1999
3 钟子云. FLASH与JAVASCRIPT之间的通讯. 计算机应用,2000. 10