

并行模糊系统的预测和辨识收敛性

Prediction and Identification Algorithm Convergence of Parallel Fuzzy Systems

於东军 杨静宇

(南京理工大学计算机系 南京210094)

Abstract Fuzzy systems can be used to identify nonlinear dynamic systems in two modes. One is series-parallel mode and the other is parallel mode. The prediction and identification algorithm convergence of nonlinear dynamic system identification using parallel fuzzy systems is discussed in this paper. It is proved that as long as the parameters of parallel fuzzy systems meet some prerequisites, the parallel prediction procedure converges and the parallel identification algorithm locally converges. This conclusion has instructive significance for parallel fuzzy systems' application.

Keywords Fuzzy system, Parallel identification, Convergence, Nonlinear dynamic system

自1965年 L. A. Zadeh^[1]提出模糊集理论以来,模糊理论已经在非线性系统辨识、函数逼近、模式识别、机器学习等领域得到了极广泛的应用。由于人的推理在本质上是模糊的,因此使用模糊理论处理实际问题时更符合人的处理过程,这就极大地提高了人类解决问题的能力。在模糊理论的应用当中,非线性系统辨识是最重要的方向之一。一般说来,模糊系统可以以两种方式^[2]用于非线性系统辨识:串并行方式和并行方式(见图1,图2)。其中 TDL 表示时间延迟逻辑,RS 表示待辨识的实际系统,FS 表示模糊系统。图1称为串并行方式,图2称为并行方式。在大部分实际应用当中使用的是串并行方式,因而对它的研究也就是说比较广泛和深入。在文[4]中我们也研究了串并行模糊系统的数字逼近特性和逼近误差及初始状态误差对模糊系统的影响。当模糊系统以串并行方式工作时,所有延迟的输出数据(用做输入数据)均为实际系统的观测值,因此对观测的精度要求比较高。太多的观测噪声会极大地影响模糊系统的性能。而在并行方式中,所有延迟的输出数据(用做输入数据)只和模糊系统本身有关,是独立于实际系统的观测值的,这是并行模糊系统的优点。但是对并行模糊系统的预测和辨识收敛性的研究还不是很完善,本文对此做了研究,给出了确保收敛性的条件。

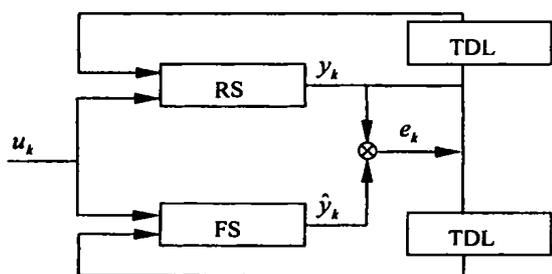


图1 串并行模糊系统

1. 模糊系统及死区 BP 算法简介

本节先介绍模糊系统必要的基本概念和我们在文[5]中得出的一个结论。更多的细节请参见文[5~7]。

一般说来,模糊系统可以用一组模糊规则集来表示:

於东军 博士生,研究方向为神经网络,模糊系统,模式识别。杨静宇 教授,研究方向为神经网络领域,模式识别,图像处理,信息融合和人工智能。

Rule 1: if x_1 is A_1^1 and x_2 is A_2^1 and \dots x_n is A_n^1 , then y is B^1
Rule 2: if x_1 is A_1^2 and x_2 is A_2^2 and \dots x_n is A_n^2 , then y is B^2
Rule m: if x_1 is A_1^m and x_2 is A_2^m and \dots x_n is A_n^m , then y is B^m
Condition: x_1 is A^1 and x_2 is A^2 and \dots x_n is A^n .
Conclusion: y is B^j

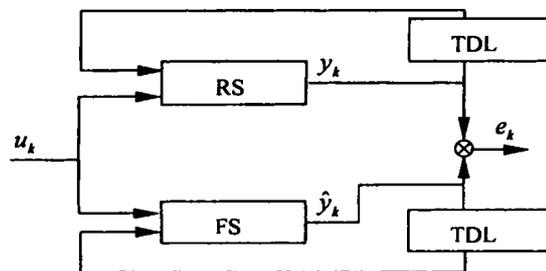


图2 并行模糊系统

假定使用最大乘积推理和中心反模糊化,最终的模糊系统输出可以写为:

$$\hat{y} = \int \mu_{B^j}(y) y dy / \int \mu_{B^j}(y) dy \quad (1)$$

其中 $\mu_{B^j}(y) = \bigvee_{x_1, x_2, \dots, x_n} [(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)) \cdot (\bigvee_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)) \cdot \mu_{B^j}(y)]$ 。

在实际使用中,结论部分中的模糊集 B^j 可以使用模糊单值 w_j , 即:

$$\mu_{B^j}(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } (y=w_j) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, j=1, 2, \dots, m$$

因此有:

$$\mu_{B^j}(y) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i), & \text{if } (y=w_j) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, j=1, 2, \dots, m$$

那么式(1)可以重写为:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^m w_j (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)) / \sum_{j=1}^m (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)) \quad (2)$$

将式(2)中的分母去掉,得:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^m w_j (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)) \quad (3)$$

在文[5]中我们已经证明了式(3)所示的模糊系统亦是一

个全局逼近器。

最后使用 Sigmoid 函数($f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$)将模糊系统的输出映射到单位区间(0,1)。模糊系统的最终输出可以写为如下形式:

$$\hat{y} = f\left(\sum_{i=1}^m w_i a_i\right) \quad (4)$$

其中, $a_i = \prod_{k=1}^n \mu_{A_k^i}(x_k)$ 。

模糊系统的参数优化可以使用基于梯度下降的误差反向传播(BP)算法。本文中我们将使用最早由 Chen^[8]提出的所谓“死区”BP 算法来优化模糊系统的参数。

不失一般性,假设多输入单输出(MISO)的非线性动态系统的输出为 y , 模糊系统的输出为 \hat{y} , θ 为模糊系统参数的列向量。定义输出均方误差为:

$$E = \frac{1}{2} (y - \hat{y})^2$$

那么 θ 可以使用下式来优化:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta \frac{\partial E}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k}$$

其中 η 为学习效率。根据经典的 BP 算法,我们有式(5):

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} = \frac{1}{2} \cdot 2(y_k - \hat{y}_k) \cdot (-1) \cdot \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} = (\hat{y}_k - y_k) \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} \quad (5)$$

令 $e = \hat{y}_k - y_k$, 定义:

$$D(e) = \begin{cases} 0, & \text{if } |e| \leq d_0 \\ e - d_0, & \text{if } e > d_0 \\ e + d_0, & \text{if } e < -d_0 \end{cases}$$

如果将式(5)写成式(6),我们就得到了死区 BP 算法:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} = D(\hat{y}_k - y_k) \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} \quad (6)$$

其中 d_0 被称为 BP 死区因子。

这样,模糊系统参数的优化公式可以写成:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta D(\hat{y}_k - y_k) \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} \quad (7)$$

本文将使用式(7)来优化并行模糊系统的参数,并称式(7)为并行模糊辨识算法。

此外,当 $|\lambda_k| < d_0$ 时,对于任意的 $e_k = \theta_k^T \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} + \lambda_k$, 存在 $0 \leq \beta_k \leq 1$, 使得式(8)成立:

$$D(e_k) = \beta_k \theta_k^T \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k} \quad (8)$$

证明过程参见文[8]。

2. 并行模糊系统的预测和辨识算法收敛性

不失一般性,假设一个非线性动态系统具有如下形式:

$$y_k = \Phi(y_{k-1}, u_k) \quad (9)$$

其中 u_k 为激励函数, $\Phi(\cdot, \cdot)$ 为非线性函数。

我们下面先给出动态系统稳定性和动态系统逼近的定义^[3]。

定义1(动态系统稳定性) 动态系统(9)的控制域为 $U_D \subset \mathbb{R}^n$, 我们称(9)是稳定的,当且仅当对于 $\forall u \in U_D$, 有 $\|y\| < \infty$ 。

定义2(动态系统的逼近) 模糊系统 $FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)$ 是动态系统(9)的逼近,当且仅当 $\|\Phi(y_{k-1}, u_k) - FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)\| \leq \varepsilon$, $y_{k-1} \in Y_D, u_k \in U_D$ 。其中 ε 是任意小的正数, Y_D, U_D 分别是输出域和控制域, θ^* 为模糊系统参数。

由模糊系统的全局逼近理论可知,对于满足定义1的动态系统,必定存在它的模糊逼近。

引理1 有 m 条规则的模糊系统 $FS(X; \theta)$, 其中 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 表示系统输入向量, θ 是模糊系统参数。如果

$$w_0 \mu_0 < \frac{4}{m}, \text{ 其中 } w_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \{|w_i|\}, \mu_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial \mu_{A_j^i}(x_j)}{\partial x_j} \right|_{\max} \right\},$$

则有: $\left\| \frac{\partial FS(X; \theta)}{\partial x_j} \right\|_{\Delta} p < 1$ 成立。

证明: 由于我们使用 Sigmoid 函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ 将模糊系统的输出映射到单位区间(0,1), 亦即:

$$FS(X, \theta) = f\left(\sum_{i=1}^m a_i w_i\right),$$

其中 $a_i = \prod_{k=1}^n \mu_{A_k^i}(x_k)$ 。

所以,我们有:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial FS(X; \theta)}{\partial x_j} \right\|_{\Delta} p &= \left\| f' \left(\sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \cdot \frac{\partial \sum_{i=1}^m a_i w_i}{\partial x_j} \right\| \\ &= \left\| f' \left(\sum_{i=1}^m a_i w_i \right) \cdot \sum_{i=1}^m [w_i \cdot \left(\prod_{k=1, k \neq j}^n \mu_{A_k^i}(x_k) \cdot \frac{\partial \mu_{A_j^i}(x_j)}{\partial x_j} \right)] \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^m [w_i \cdot 1 \cdot \frac{\partial \mu_{A_j^i}(x_j)}{\partial x_j}] \right\| \quad (\because \|f'(x)\| \leq \frac{1}{4}) \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^m \frac{1}{4} w_0 \mu_0 \right\| = \frac{m w_0 \mu_0}{4} < 1 \quad (\because w_0 \mu_0 < \frac{4}{m}) \end{aligned}$$

(说明: $\left| \frac{\partial \mu_{A_j^i}(x_j)}{\partial x_j} \right|_{\max}$ 是定义在第 i 条规则中的第 j 输入维上的隶属函数的最大导数值)。

定理1 具有 m 条规则的模糊系统 $FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)$ 是动态系统(9)的逼近,并且 $w_0^* \mu_0^* < \frac{4}{m}$, 其中 $W_0^* = \max_{1 \leq i \leq m} \{|w_i^*|\}$, $\mu_0^* = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial \mu_{A_j^i}(x_j)}{\partial x_j} \right|_{\max} \right\}$, 那么并行预测过程 $\hat{y}_k = FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)$ 收敛。

证明:

$$\begin{aligned} \|y_k - \hat{y}_k\| &= \|\Phi(y_{k-1}, u_k) - FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta^*)\| \\ &\leq \|\Phi(y_{k-1}, u_k) - FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)\| + \|FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*) - FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta^*)\| \\ &\leq \varepsilon + \|FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*) - FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta^*)\| \quad (\text{根据定义2}) \\ &\leq \varepsilon + \|FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*) - FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta^*)\| \\ &\leq \varepsilon + \left\| \frac{\partial FS}{\partial y} \right\|_{\zeta} \|y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\| \end{aligned}$$

也就是:

$$\|y_k - \hat{y}_k\| \leq \varepsilon + \left\| \frac{\partial FS}{\partial y} \right\|_{\zeta} \|y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\|,$$

其中 $\zeta \in [\min\{y_{k-1}, \hat{y}_{k-1}\}, \max\{y_{k-1}, \hat{y}_{k-1}\}]$ 。

根据引理,我们有

$$\left\| \frac{\partial FS}{\partial y} \right\|_{\zeta} \leq p < 1.$$

所以

$$\|y_k - \hat{y}_k\| \leq \varepsilon + \left\| \frac{\partial FS}{\partial y} \right\|_{\zeta} \|y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\|$$

$$\leq \varepsilon + p \|y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\|$$

亦即

$$\|y_k - \hat{y}_k\| \leq \varepsilon + p \|y_{k-1} - \hat{y}_{k-1}\| \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} \|y_k - \hat{y}_k\| &\leq \varepsilon + p(\varepsilon + p \|y_{k-2} - \hat{y}_{k-2}\|) \text{ (重复使用式(10))} \\ &\leq \varepsilon + p\varepsilon + \dots + p^{k-1}\varepsilon + p^k \|y_0 - \hat{y}_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1-p} + p^k \|y_0 - \hat{y}_0\| \end{aligned}$$

亦即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - \hat{y}_k\| = \frac{\varepsilon}{1-p}$$

至此证明了并行预测过程的收敛性。

定理2 具有 m 条规则的模糊系统 $FS(y_{k-1}, u_k; \theta^*)$ 是动态系统(9)的逼近, 并且 $w_0^* \mu_0^* < \frac{4}{m}$, 其中 $w_0^* = \max_{1 \leq i \leq m} \{ |w_i^*| \}$,

$\mu_0^* = \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} \{ | \frac{\partial \mu_{k,j}^*(x)}{\partial x} |_{\max} \}$, 那么并行辨识算法(7)局部收敛,

亦即 $\|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\|$.

证明: 我们用 $\tilde{\theta}_k, L_k$ 分别表示 $\theta_k - \theta^*$ 和 $\frac{\partial FS}{\partial \theta} \Big|_{\theta_k}$.

于是我们有:

$$\begin{aligned} e_k &= \hat{y}_k - y_k = FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k) - \Phi(y_{k-1}, u_k) \\ &= FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k) - FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k^*) + FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k^*) - \Phi(y_{k-1}, u_k) \\ &= \tilde{\theta}_k^T L_k + o(\|\theta_k - \theta^*\|) + FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k^*) - \Phi(y_{k-1}, u_k) \end{aligned}$$

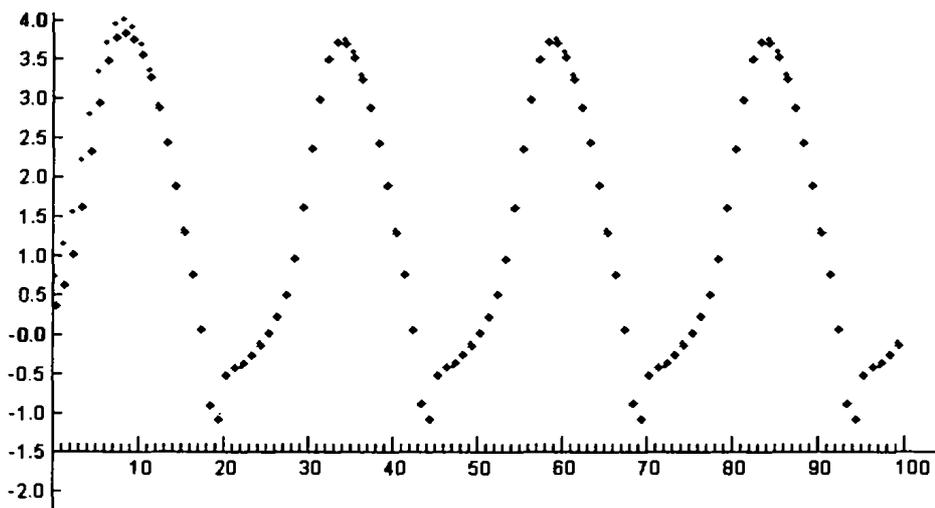
设 $\lambda_k = o(\|\theta_k - \theta^*\|) + FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k^*) - \Phi(y_{k-1}, u_k)$.

那么 $\|\lambda_k\| \leq o(\|\theta_k - \theta^*\|) + \|FS(\hat{y}_{k-1}, u_k; \theta_k^*) - \Phi(y_{k-1}, u_k)\|$.

根据定理1, 有 $\|\lambda_k\| \rightarrow o(\|\theta_k - \theta^*\|) + \frac{\varepsilon}{1-p}$.

又由式(7), 有 $\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{\theta}_k - \eta D(e_k) L_k$.

当 θ_k 对 θ^* 充分逼近时, 亦即 $\|\theta_k - \theta^*\|$ 充分小使得 $\|\lambda_k\| < d_0$, 结合式⑧, 我们有:



细点—实际系统(初始状态值 $y_1[-1]=0.5; y_2[0]=0.9$)

粗点—模糊系统(初始状态值 $y_1[-1]=0.2; y_2[0]=0.4$)

图3 模糊系统的预测过程

另一方面, 我们可在训练之前来配置模糊系统的参数。可以使模糊系统的参数满足 $w_0^* \mu_0^* < \frac{4}{m}$, 然后再来训练模糊系统。设置 $w_0^* = 1.10, \mu_0^* = 0.35$, 使之满足了 $w_0^* \mu_0^* = 1.10 * 0.35 = 0.385 < \frac{4}{8} = 0.5$, $d_0 = 0.002$ 。我们发现辨识系统稳定收敛。

$$\begin{cases} D(e_k) \leq \tilde{\theta}_k^T L_k, D(e_k) > 0 \\ D(e_k) \geq \tilde{\theta}_k^T L_k, D(e_k) \leq 0 \end{cases}$$

所以 $\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} = -2 * \eta D(e_{k-1}) \tilde{\theta}_{k-1}^T L_{k-1} + \eta^2 D^2(e_{k-1}) L_{k-1}^T L_{k-1} \leq -2\eta D^2(e_{k-1}) + \eta^2 D^2(e_{k-1}) L_{k-1}^T L_{k-1}$.

由于学习效率 η 满足 $0 < \eta < 1$, 只要 $\eta L_{k-1}^T L_{k-1} < 1$, 我们有:

$$\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} \leq -\eta D^2(e_{k-1}) \leq 0.$$

亦即

$$\|\tilde{\theta}_k\| \leq \|\tilde{\theta}_{k-1}\|.$$

由于 $\tilde{\theta}_k = \theta_k - \theta^*$,

所以

$$\|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\|.$$

至此我们证明了并行辨识算法(7)的局部收敛性。

3. 仿真分析

给定动态非线性系统

$$y(t+1) = \frac{y(t)y(t-1)(y(t)+2.5)}{1+y^2(t)+y^2(t-1)} + u(t) \quad (11)$$

$u(t) = \sin \frac{2\pi t}{25}$ 为激励函数,

系统初始状态值 $y(0) = 0.9, y(-1) = 0.5$.

首先我们将式(11)的输入/输出映射到单位区间(0,1), 然后在 $y(t), y(t-1), u(t)$ 上分别划分两个模糊子集, 因此模糊系统有8条规则。设置逼近误差为 $\varepsilon = 0.003$ 。训练200次后模糊系统满足逼近误差。训练结束后模糊系统参数为 $w_0^* = 1.02, \mu_0^* = 0.41$, 满足 $w_0^* \mu_0^* = 1.02 * 0.41 = 0.42 < \frac{4}{8} = 0.5$ 。然后就可以独立地使用模糊系统(使用与实际系统不同的初始状态值)进行预测。图3显示了预测结果。我们可以很容易发现, 尽管模糊系统使用了与实际系统不同的初始状态值, 预测结果仍然能够收敛。图3中需要注意的是模糊系统和实际系统的输出被从单位区间(0,1)映射回它们的实际值。

三、规范的针孔模型

在计算机图形和视觉学科中,所讨论的针孔模型,都是精心挑选的坐标系以方便计算.对于通用平面针孔模型,我们可以用QR分解法将矩阵P分解成一个旋转矩阵和一个上三角矩阵即内P参数矩阵.

定理 通用平面针孔模型矩阵P可分解为旋转矩阵R和一个上三角矩阵U的乘积,其中U为:

$$u = \begin{bmatrix} a_1 = \sqrt{aa} & b_1 = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a^1} & c_1 = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{a^1} \\ a_2 = 0 & b_2 = \sqrt{\bar{b} \bar{b} - \bar{b}_1^2} & c_2 = \frac{-\bar{b}\bar{c} - b_1 c_1}{b_2} \\ a_3 = 0 & b_3 = 0 & c_3 = \sqrt{\bar{c}\bar{c} - c_1^2 - c_2^2} \end{bmatrix}$$

则 $a = P \cdot u = R \cdot U \cdot u$

证明: $P = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$ 是一个非奇异的实矩阵.

按 schmid 正交化方法得

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = \bar{a} \\ b_2 = \bar{b} - k_{21} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_3 = \bar{c} - k_{32} \bar{b}_2 - k_{31} \bar{b}_1 \\ k_{21} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \quad k_{31} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \quad k_{32} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}_2}{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2} \end{cases}$$

则 $\begin{cases} \bar{a} = \bar{b}_1 \\ \bar{b} = k_{21} \bar{b}_1 + \bar{b}_2 \\ \bar{c} = k_{31} \bar{b}_1 + k_{32} \bar{b}_2 \end{cases}$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \cdot c \quad c = \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & k_{31} \\ 0 & 1 & k_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再对 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ 单位化得 $q_i = \frac{\bar{b}_i}{|\bar{b}_i|} (i=1, 2, 3)$

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \cdot c = (q_1, q_2, q_3) \cdot \text{diag}(|\bar{b}_1|, |\bar{b}_2|, |\bar{b}_3|) \cdot c$$

令 $R = (q_1, q_2, q_3), U = \text{diag}(|\bar{b}_1|, |\bar{b}_2|, |\bar{b}_3|) \cdot c$

$$U = \begin{bmatrix} |\bar{b}_1| & k_{21} |\bar{b}_1| & k_{31} |\bar{b}_1| \\ 0 & |\bar{b}_2| & |\bar{b}_2| k_{32} \\ 0 & 0 & |\bar{b}_3| \end{bmatrix}$$

(上接第176页)

结论 本文讨论了并行模糊系统的预测和辨识算法的收敛性问题,指出只要并行模糊系统的参数满足一定的条件,并行预测和辨识算法可以保证收敛.仿真结果也证明了上述结论的正确性.这对于并行模糊系统的应用具有理论价值.

参考文献

- 1 Zadeh L A. Fuzzy sets, Inform. Contr., 1965, 8: 338~353
- 2 Narendra K S, Parthasarathy K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. IEEE Trans. Neural Networks, March, 1990, 1(1): 4~23
- 3 卢进, 徐文立, 韩曾晋. 神经网络并联辨识算法研究. 控制理论与应用, 1998, 15(5): 741~745

$$a_1 = |\bar{b}_1| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} \quad b_1 = |\bar{b}_1| \cdot k_{21} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a_1}$$

$$c_1 = |\bar{b}_1| \cdot k_{31} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{\sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{c}}{a_1}$$

$$b_2 = |\bar{b}_2| = \sqrt{(\bar{b} - k_{21} \bar{b}_1) \cdot (\bar{b} - k_{21} \bar{b}_1)}$$

$$= \sqrt{\bar{b} \bar{b} - 2(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{a}}) \bar{b} \bar{a} + (\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{a}})^2 \bar{a} \bar{a}} = \sqrt{\bar{b} \bar{b} - b_1^2}$$

$$c_2 = |\bar{b}_2| k_{32} \quad k_{32} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}_2}{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2} = \frac{\bar{c} (\bar{b} - \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \cdot \bar{a})}{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2}$$

$$c_2 = \frac{\bar{b}\bar{c} - \frac{\bar{b} \cdot \bar{a}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}}{|\bar{b}_2|} = \frac{\bar{b} \cdot \bar{c} - b_1 \cdot c_1}{|\bar{b}_2|}$$

$$c_3 = |\bar{b}_3| = \sqrt{\bar{b}_3 \cdot \bar{b}_3} =$$

$$\sqrt{(\bar{c} - k_{32} \bar{b}_2 - k_{31} \bar{b}_1) (\bar{c} - k_{32} \bar{b}_2 - k_{31} \bar{b}_1)} = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c} + (k_{32} \bar{b}_2)^2 + (k_{31} \bar{b}_1)^2 - 2k_{32} \bar{b}_2 \bar{c} - 2k_{31} \bar{b}_1 \bar{c}}$$

$$k_{31} \bar{b}_1 \bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{a}}{\bar{a} \cdot \bar{a}} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c} = \frac{(\bar{a} \cdot \bar{c})^2}{\bar{a} \cdot \bar{a}} = (k_{32} \cdot \bar{b}_2)^2 = c_1^2 (k_{32} \bar{b}_2)$$

$$= c_1^2 (k_{32} \bar{b}_1) = c_2^2$$

$$k_{32} \bar{b}_2 \cdot \bar{c} = k_{32} \cdot (\bar{b} - \bar{a} \cdot \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{a}}) \bar{c} = k_{32} (\bar{b} \cdot \bar{c} - \bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{a}})$$

$$= (k_{32} \bar{b}_2)^2 = c_2^2$$

$$c_3 = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c} - c_1^2 - c_2^2}$$

证毕

结束语 本文讨论了基于图像的图形生成方法的通用摄像机模型机,给出了通用虚拟平面摄像机针孔模型并用UR分解证明了通用模型经过旋转可以变成标准模型.

参考文献

- 1 马颂德. 计算机视觉. 科学出版社, 1997
- 2 McMillan. An Image-based Approach To Three-Darren Sired Compete Graphics. [North Carolina Ph. D theses]. 1997
- 3 程云鹏. 矩阵论. 西北工业大学出版社, 2000. 8

- 4 王士同, 於东军. 非线性系统模糊辨识的误差分析. 软件学报, 2000, 11(4): 447~452
- 5 於东军, 王士同. 新模糊神经网络及其建模应用. 华东船舶工业学院学报, 1998, 12(2)
- 6 Lin C T. Neural Fuzzy System. Prentice-Hall Press, U. S. A., 1997
- 7 Wang L X. A Course on Fuzzy Systems. Prentice-Hall press, U. S. A., 1999
- 8 Chen F C. On the error and parameter convergence of back-propagation learning. In: Proc. of IJCNN'91, 1991. 1092~1097
- 9 於东军, 王士同, 吴小俊. 层次径向神经网络的全局逼近理论. 计算机研究与发展, 1999, 36(11): 1329~1334