基于小波分形的图像分割算法*)

Wavelet Fractal-Based Image Segment Algorithm

叶俊勇　汪同庆　彭　健　杨　波

（重庆大学光电工程学院人工视觉研究室　重庆400044）

Abstract　The image of shoe leather lumen is not very satisfaction because of technology of CT. The smart image segment is the base of getting smart measurement data. An algorithm of image segment based on wavelet and fractal has been proposed after analyzing the specialty of images. The image is decomposed through wavelet multi-resolution decomposition , and the fractal dimension is calculated by the decomposed image. This approach is more satisfied than general method in image segment of shoe leather lumen image by CT. This algorithm can segment the edge of shoe lumen exactly. The experimentations prove the approach is rational.

Keywords　Wavelet analysis, Fractal dimension, Image segment

皮鞋内腔的自动测量是当今国内外都没有解决的难题。国外通常采用接触式测量，用传感器与皮鞋内腔接触获得数据。这种测量方法存在精度不高的缺点。重庆大学ICT中心在多年ICT研究的基础上提出了用工业CT来解决长期困扰皮鞋工业的难题。

皮鞋内腔CT测量仪获得皮鞋的断面图像以后，由于工业CT通过断层扫描获得的图像通常会产生伪影见图1，它是图像中与被检物的物理参数分布没有对应关系的部分，因此图像质量不是非常理想，要对重建出来的图像进行准确的分割，才能够根据分割后的图像进行测量，进而根据多个断面的图像重建出三维数据，从而提供给CAD/CAM系统作辅助设计与辅助生产。

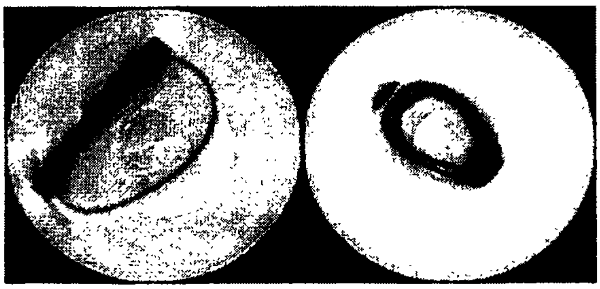

图1　皮鞋内腔CT测量重建图像

现在提出的分割算法大多针对具体问题，没有一种适合于所有图像的通用分割算法。本文面对的图像分割具有其特殊性，分割以后的图像要进行精确测量，获得内腔尺寸，分割的精确度要求非常高。通过对常用的分割算法的试验表明，很难达到要求。考虑到CT图像所特有的伪影及皮鞋内腔图像特点，图像具有很多纹理特征，因此采用了基于纹理分割的小波分形分割算法，通过对不同分辨率通道的图像分析分形维数特征进行分割。试验表明该算法能够精确地分割皮鞋CT内腔图像，对于具有该类图像特征的图像分割具有普遍意义。

1　小波理论及多分辨率分解

小波分析的基本思想是用一族函数去表示或逼近一个信号或函数，这一函数族称为小波函数系（小波基），它是通过一个基本小波函数的不同尺度的伸缩和平移而形成的。而所谓的小波变换，其实质则是将信号投影到一系列小波基上。小波变换分为连续小波变换（CWT）和离散小波变换（DWT）两种。CWT主要用于理论分析，在实际应用中，我们一般采用基于多尺度分析的DWT。

下面我们先给出小波变换的定义[2]：

定义1　假设母小波函数为$\phi(x)\in L^1\cap L^2$，则按照如下方式生成的函数族$\{\phi a,b\}\phi_{a,b}(t)=|a|^{-\frac{1}{2}}\phi(\frac{t-b}{a})$

称为分析小波。其中$a\in R-\{0\}$，$b\in R$分别称为伸缩和平移因子。

定义2　对于信号$f\in L^2$，若母小波ϕ满足下面的允许条件：

$$\int_R \frac{|\Phi(\widetilde{\omega})|^2}{|\widetilde{\omega}|}d\widetilde{\omega}<\infty, or, \int_R \phi(t)dt=0$$

则f的连续小波变换$W_f(a,b)$定义为：$W_f(a,b)=\langle f,\phi_{a,b}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi_{a,b}(t)dt$

其中Φ为ϕ的Fourier变换。

上面定义的小波变换可以通过对其伸缩因子a和平移因子b进行采样而离散化。对a,b依如下规律采样：$a=a_0^m(a_0>1)$，$b=nb_0a_0^m$，则我们得到离散小波：$\phi_{m,n}(x)=a_0^{-\frac{m}{2}}\phi(a_0^{-m}x-nb_0)$。这样离散小波变换可定义为：$DW_{m,n}=\int_R f(x)\phi_{m,n}(x)dx$。

当$a_0=2$，$b_0=1$时，上式变为一离散正交的二元小波变换。

小波变换还具有一些基本性质，如：线性叠加性、尺度共变性、能量守衡性、局域正则性等。更多有关小波理论请参考

*）本文得到国家八五攻关项目资助(85-604-20-04)。**叶俊勇**　博士研究生，研究方向为图像处理与识别、文字识别、人工视觉。**汪同庆**　教授，研究方向为文字识别、图像识别、图像编码与压缩。**杨　波**　博士研究生，研究方向为图像处理、图像识别、图像编码与压缩、文字识别系统研究与应用。**彭　健**　博士研究生，研究方向为文字识别、人工视觉。

相关书籍，这里不作过多讨论。

1.1 小波基的选择

小波分析中，最重要的是如何选择小波基。到目前为止，人们已经构造了各种各样的小波基函数。例如，Meyer 在1985年构造出了第一组 C^{∞} 小波正交基。Daubechies 于1988年利用二进多尺度分析构造了具有紧支集和一定正则性的小波正交基，并证明除 Haar 基外，不存在对称或反对称的具有紧支集的正交小波基。后来 Coifman 极其合作者构造了一个正交基库，其中收藏了很多正交小波基。除此之外，还有 Stromberg 基、Lemarie 基、B-小波基、插值样条小波基等非正交小波基。从理论上来讲，L2(R)空间中存在无穷多个小波基。而基小波的选择并无一般性的原理可以遵循，我们只有根据所要解决的问题来选择小波基。由于正交小波的构造均比较复杂且无显式表示，而且具有紧支集的正交小波不具有线性相位或广义线性相位，因此我们选择非正交的小波基。在各种小波中，Daubechies 小波具有最小支集和广义线性相位，而且 Daubechies 小波具有良好的局部化性质，可以不断地以任意精度逼近所要讨论的系统，因此我们首选 Daubechies 小波。

1.2 小波多分辨率分解

定义3 如果 $L^2(R)$ 的闭子空间序列 $\{V_j;j\in Z\}$ 满足：①包含性(单调性)：$\forall\, j\in Z, V_j\subset V_{j-1}$；②分离性：$\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$；③稠密性：$\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(R)$；④二尺度特性：$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j-1}$，则称闭子空间序列 $\{V_j:j\in Z\}$ 为 $L^2(R)$ 的一个多分辨率分析(MRA Multi-Resolution Analysis)。

定理1 对于 $L^2(R)$ 的任意一个多分辨率分析 $\{V_j:j\in Z\}$，都存在唯一的被称为尺度函数的函数 $\varphi(t)\in L^2(R)$，使得对它的伸缩

$\varphi_{2^j}(t)=2^j\varphi(2^jt)$ 和平移 $\varphi_{2^j}(t-2^{-j}n)$

构成 V_j 子空间的一个标准正交基 $\{\sqrt{2}\,\varphi_{2^j}(t-2^{-j}n),n\in Z\}$。这样子空间 V_{j+1} 就可以分解为两个子空间的直和：

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j \tag{1}$$

对于能量有限的离散信号 $\{f(t):x(k),k=1,2,\cdots,n\}$，按照(1)式，令 $V_0=\{x(k),k=1,2,\cdots,n\}$，$j=-1,-2,-3,\cdots$，就可以在不同分辨率上对信号进行描述。

若记 $A_{2^j}f$ 为 $f(t)$ 在 V_j 上的投影算子，$D_{2^j}f$ 为 $f(t)$ 在 W_j 上的投影算子，

$$h(n)=\langle\varphi_{2^{-1}}(u),\varphi(u-n)\rangle,\forall\, n\in Z,$$

$$\overline{h}(n)=h(-n),A^d_{2^j}f(n)=\langle f(u),\varphi_{2^j}(u-2^{-j}n)\rangle$$

Mallat 经过理论分析和实验证明[3,4]，$A_{2^j}f$ 实质上是信号通过了一个低通滤波器 $\overline{h}(n)$ 的结果，V_j 代表了信号的低频部份，表示了信号的基本成份；$D_{2^j}f$ 实质上是信号通过了一个高通滤波器的结果，W_j 代表了信号的高频部份，表示了信号的细节成份。由此，Mallat 得到了下面的金字塔信号分解算法：

$$\langle f(u),\varphi_{2^j}(u-2^{-j}n)\rangle=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{h}(2n-k)\langle f(u),\varphi_{2^{j+1}}(u-2^{-(j+1)}k)\rangle$$

$$\text{或 } A^d_{2^j}f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{h}(2n-k)A^d_{2^{j+1}}f(k)$$

二进制的离散小波变换可表示为：

$$f(t)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}C_{m,n}\Psi_{m,n}(t),\Psi_{m,n}(t)=2^{-\frac{m}{2}}\Psi(2^{-2m}t-n)$$

其中：$C_{m,n}=\int_R f(t)\overline{\Psi}_{m,n}(t)dt$

由于 DWT 具有多分辨率的性质，因此在实际应用中，常以滤波器的形式来表示(如 Quadra-Ture Mirror Filter，QMF)，其结构如图2所示。

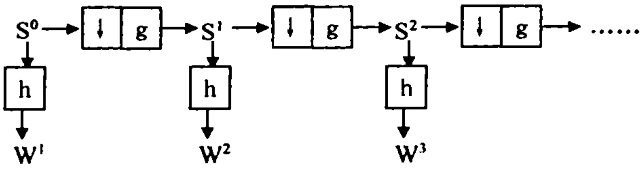

图2 DWT 滤波器结构

图中 g 为低通滤波器，h 为高通滤波器。用它们对信号 S0 进行滤波，得 S1和 W1，分别表示低频信息和高频信息。对 S1 再进行滤波，又可得 S2和 W2……这样最后 S0就被分解为 W1，W2，W3，…，Wn，Sn。具体应用中使用了 Daubechies 滤波器对，它是一种与 Daubechies 紧缩正交小波基函数 Φ(x)，Ψ(x)相联系的滤波器对。在从小波基函数求得滤波器 g，h 后，DWT 就只是简单的卷积运算了：

$$S^i_n=\sum_{m=0}^{L-1}S^{i-1}_{2n-m}g_m,\ W^i_n=\sum_{m=0}^{L-1}S^{i-1}_{2n-m}h_m$$

其中：L 为滤波器长度。

2 分形理论模型

分形[5]作为描述大量自然现象的数学模型越来越受到人们的重视，分形几何理论本身及其应用都有了惊人的发展。1984年，Pentland 证明了自然界的大多数表面是空间各项同性的分形，且这些表面所映射成的灰度强度分布场也具有分形特征，也就是说，可以通过对表面的图像数据分析得出自然界存在物体的分形特征。而 Peli 等众多学者的研究表明，自然纹理具有分形特征，而人造物体一般不具有分形特征，因此分形维数可用来分割人造目标体与背景。所有这些研究为分形理论的应用奠定了基础。

2.1 分形理论

现在似乎还没有一个公认的分形的严格定义。一般人们大都沿用 Mandolbrot 的定义，即 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数的集合称为分形集。Hausdorff 维数的定义如下：

定义4 设 $D>0$，用直径小于 $\varepsilon>0$ 的可数个集合覆盖集合 $E\subset R^n$，假设 $d1,d2,\cdots$ 为各集的直径，则 E 的 D 维 Hausdorff 测度可用下式来定义：

$$M_D(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{d_k<\varepsilon}\sum_k d_k^D$$

而 E 的 Hausdorff 维数则定义为：

$$\dim_H(E)=\inf(D:M_D(E)=0)=\sup(D:M_D(E)=\infty)$$

由上面的定义可知，Hausdorff 维数不便于计算，因此其主要应用是在理论研究方面。在实际应用中，一般用下面两个定义来代替。

定义5 将有界集合 E 缩小 $1/a$ 倍得到与之相似的集合 F，若 E 可由 b 个 F 构成，则集合 E 的相似维数定义为：

$$\dim_s(E)=\frac{\log b}{\log a}$$

定义6 设 $E\subset R^n$ 是非空有界集合，$N_\delta(E)$ 是直径最大为 δ，可以覆盖 E 的集的最少个数，则 E 的上、下盒维数分别定义为：

$$\overline{\dim}_BE=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta}\quad \underline{\dim}_BE=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta}$$

如果这两个值相等，则定义它为 E 的盒维数，记作

$$\dim_B E=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta}$$

由上面两个定义可以看出，相似维数的定义最简单，它事实上反映了分形的自相似性。但是严格意义下的自相似是不存在的，严格的自相似属于主观世界，尤其是计算机世界。而客观世界中只有所谓的统计自相似，即概率意义下的自相似。这使得在实际应用中，盒维数更具有实用价值。

盒维数有许多等价的定义，上面定义中的 $N_\delta(E)$ 可以用以下两个数中的任一个代替：

(a)覆盖 E 的 δ-网立方体个数。

(b)覆盖 E 的边长为 δ 的最少的立方体个数。

其中 δ-网立方体就是如下形式的立方体：$[M_1\delta,(M_1+1)\delta]\times\cdots[Mn\delta,(Mn+1)\delta]$，$M_1,\cdots,M_n$ 为整数。

由于分形的维数反映了人们对物体表面粗糙程度的感受，同时又具有尺度变换下不变性等优异的性质，因而该参数在实际应用中备受青睐。对于如何准确估计分形维数这一关键问题，人们提出了许多计算方法。这些方法大致可分为两类：第一类是基于某种模型的计算，如 Pentlend[6]使用分形布朗运动来描述自然界中的纹理表面，并通过分形布朗运动的 Fourier 能谱满足幂关系这一性质估计分形维数。另一类方法是从维数的定义或其等价形式出发，直接计算物体表面的分形维数。如 Peleg[7]等发展了 Mandelbrot 的“ε-blanket”方法计算曲面维数。Keller 等[8]首次在估计维数时对图像进行了线性插值，以减少采样及量化的影响。Sarkar 等[9]于1992年提出了微分盒数计算方法(DBC 方法)。Jin 等[10]于1995年提出了相关微分盒数计算方法(RDBC 方法)，对 DBC 方法进行了改进。应宇铮、石青云[11]于1997年对 DBC 方法进行了进一步改进，提高了维数估计的准确性和有效性。

在对分形理论进行研究的基础上，通过对皮鞋内腔 CT 测量图像的分析，提出了一种将分形理论应用于图像分割思想方法。通过前面论述的小波多分辨率分析，提取不同分辨率通道图像的分形维数特征，来对图像进行分割。

2.2 分形维数计算方法

在计算图像的分形维数时，我们一般将图像看作是三维空间中的一个曲面 $z=f(x,y)$，其中 x,y 对应于图像中各点的位置，z 分量则表示图像的灰度值。设图像为 $M\times M$ 的正方形，灰度级为 G。将图像的 x-y 平面分成大小为 $a\times a$ 的正方形格子。Sarkar 等人提出的 DBC 方法的思想是：取 $\delta>0$，使得 $[G/\delta]=[M/a]$，则 $a\times a\times\delta$ 构成三维空间的一个盒子。而 x-y 平面上的每一个格子对应于一叠这样的盒子。假设在第(i,j)个格子中，图像灰度的最大值位于第 max 个盒子中，最小值位于第 min 个盒子中，则在该格子内，覆盖图像曲面的盒子数为：

$$n_a(i,j)=\max-\min+1$$

而对整幅图像来讲，非空的 $a\times a\times\delta$ 的盒子为：

$$N_a=\sum_{i,j}n_a(i,j)$$

对于不同的 a 值，计算出对应的 Na 的值。接着将 (a,Na) 取对数得到 $(\log a,\log Na)$。然后在平面上建立一个 $\log a$-$\log Na$ 坐标系，在该坐标系下描出对应于不同的 a 值的点 $(\log a,\log Na)$，用最小二乘法拟合出一条直线，该直线的斜率取负号就是图像曲面的估计维数。

Jin 等提出的 RDBC 方法中，对 Na 的计算进行了改进。设在格子 (i,j) 上，最大、最小灰度值分别为 $ua(i,j)$ 和 $la(i,j)$，定义 $da(i,j)=ua(i,j)-la(i,j)$。则图像上的盒子总数：

$$N_a=\sum_{i,j}ceil[k_{d_a}(i,j)/a]$$

其中，$k=M/G$，$ceil[x]$ 表示大于等于 x 的最小整数。经过这种改进之后，实验结果略有提高。应宇铮等在 RDBC 方法的基础上，将计算盒子数的公式进一步修改为：

$$N_a=\sum_{i,j}d_a(i,j)/a$$

从而解决了 RDBC 方法中由于取整带来的阶梯影响，最大限度地反映了像素间的灰度变化，因此使得 log-log 图上成直线段的区间扩大，有效地提高了维数估计的准确性。

在仔细分析皮鞋内腔 CT 图像数据的基础上，提出了如下的加权盒维数计算方法。将计算盒子数的公式改为：

$$N_a=\sum_{i,j}W(i,j)d_a(i,j)/a$$

其中 $w(i,j)$ 是权值。考虑到图像中各个区域对内腔测量本身的贡献不一样，我们认为图像中间的点比边缘的点贡献没那么大，这是由皮鞋内腔 CT 图像的特点决定的，因此设置的权值用来反映这种区别。

3 试验结果及性能评价

图1是皮鞋内腔 CT 测量仪获得的两幅重建图像，采用浮动阈值法分割获得的图像如图3所示。采用本文方法分割的图像如图4所示。从图3可以看出常用的分割算法对于 CT 测量图像分割有一些问题，首先由于各种干扰的存在，比如伪影，分割图像存在很多噪声，其次分割后的图像没有准确地获得边缘信息，特别是内部边缘有扩大的趋势，这对于图像测量是非常不利的。无法得到准确的皮鞋内腔尺寸。采用本文分割法，解决了上述两个问题，分割以后再通过边缘插值平滑以后，测量获得的数据传输给 CAD/CAM 加工系统生产出了和被测量皮鞋的内腔完全一致的鞋楦，目前整个系统已经通过计委鉴定，达到了预定的攻关计划要求。

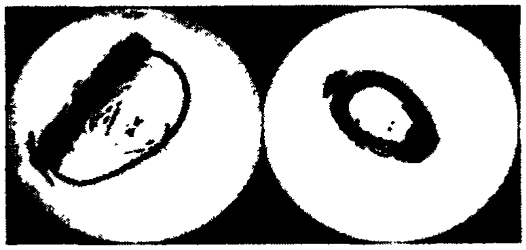

图3 浮动阈值法分割结果

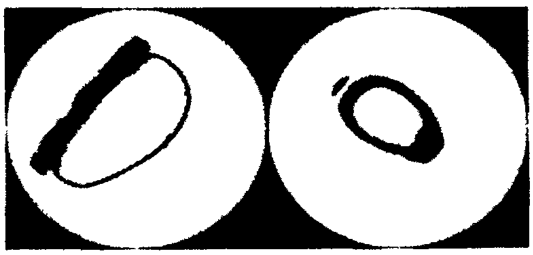

图4 小波分形法分割结果

结束语 在分析皮鞋内腔 CT 测量图像的特点以后，提出了基于小波分形技术的图像分割算法。通过小波多分辨率分解，计算分解以后的原始图像各通道的字图像分形维数，进行图像分割，获得了比较理想的结果，和其他常用的分割算法比较，有比较明显的优势。该算法在实际应用中获得了验证，证明该算法是合理的。 (下转第149页)

执行需要的数据量会大大增加，系统假设的 N 不能太大，就这一点来说，如何在保证安全性的条件下降低协议的复杂性是一个重要的研究方向，这很大一部分依赖于纠错码技术的发展。

非对称数字指纹协议的提出使指纹协议的研究迈上了一个新的台阶，只有购买者自己知道“指纹”的内容，避免了因双方都保有“指纹”从而无法仲裁的问题，既保证了盗版者的不可抵赖性，又保证了诚实的购买者不会被不诚实的商家或其工作人员所陷害。由于非对称数字指纹协议使用了安全两方计算等密码学技术，从执行效率来说会很大程度依赖于这些技术的效率，因此选择合适的相关技术方案是非对称指纹协议在应用时需要研究的问题。

而匿名协议则是目前的研究热点，使指纹协议更贴近于现实中的商品交易过程。匿名性已经成为继非对称性之后对数字指纹协议的基本安全要求。由于安全要求的增加，指纹协议使用的密码技术也随之增加，使协议的复杂性更是大大增加，这很不利于实际应用，我们认为如何简化数字指纹协议，提出技术依赖性比较小，执行速度快的匿名协议是使数字指纹协议实用化的一个重要的研究方向。

结论 数字指纹协议为解决电子交易中的盗版问题提出了可行的密码学体系，从各种安全性角度解决了不同的安全问题。数字指纹协议的提出，使数字产品的无形交易过程变得更安全可靠。越来越多的数学密码学工具被用来实现更安全的非对称性和匿名性。数字指纹协议有着广阔的应用前景，从数字图像、数字电影电视节目、数字音乐，到应用程序、数字文档，各种数字产品的交易都可以和数字指纹协议结合起来以保证产品版权的安全性。因此，除了理论的研究，如何将指纹协议结合到各种现实的电子交易应用系统中去也是非常需要解决的问题，毕竟理论研究的目的是为了现实的应用。

参 考 文 献

1 Wagner N R. Fingerprinting; 1983 Symposium on Security and Privacy, IEEE, Oakland, California, 18～22

2 Chor B, Fiat A, Naor M. Tracing Traitors; Crypto '94, LNCS 839, Springer-Verlag, Berlin, 1994. 257～270

3 Boneh D, Shaw J. Collusion-Secure Fingerprinting for Digital Data; Crypto'95, LNCS 963, Springer-Verlag, Berlin, 1995. 452～465

4 Pfitzmann B, Schunter M. Asymmetric Fingerprinting; Eurocrypt'96, LNCS 1070, Springer-Verlag, Berlin, 1996. 84～95

5 Pfitzmann B, Waidner M. Anonymous Fingerprinting; Eurocrypt'97, LNCS1233, Springer-Verlag, Berlin, 1997. 88～102

6 Naor M, Pinkas B. Threshold Traitor Tracing; Crypto'98, LNCS 1462, Springer-Verlag, Berlin, 1998. 502～517

7 Pfitzmann B, Waidner M. Asymmetric Fingerprinting for Larger Collusions; accepted for 4th ACM Conference on Computer and Communications Security, 1997

8 Biehl I, Meyer B. Protocols for Collusion-Secure Asymmetric Fingerprint-ing; STACS 97, LNCS 1200, Springer-Verlag, Berlin, 1997. 399～412

9 Domingo-Ferrer J. Anonymous Fingerprinting of Electronic Information with Automatic Identification of Redistributors; Electronics Letters 34/13, 1998. 1303～1304

10 Blakley G R, Meadows C, Purdy G B. Fingerprinting Long Forgiving Messages; Crypto'85, LNCS 218, Springer-Verlag, Berlin, 1986. 180～189

11 Garonni G. Assuring Ownership Rights for Digital Images. In: Proc. VIS '95; Vieweg, Wiesbaden, 1995. 251～263

12 Canetti R. Studies in secure multiparty computation and applications: [Ph. D. dissertation]. MIT, 1999

13 Cox I J, Kilian J, Leighton T, et al. Secure spread spectrum watermarking for multimedia. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12): 1673～1687

14 Fiat A, Naor M. Broadcast Encryption; Crypto'93, LNCS 773, Springer-Verlag, Berlin, 1994. 480～491

15 Lai X, Massey J. Hash functions based on block ciphers, Eurocrypt'92, Springer-Veralg, 1992. 55～70

16 Ostrovsky R. An efficient software protection scheme; Crypto '89, LNCS 435, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990. 610～611

17 Petitlas F A P, Anderson R J, Kuhn M G. Information hiding-A survey. Proc. of the IEEE, 1999, 87(7): 1062～1078

18 Roe M. Performance of block ciphers and hash functions-one year later, FSE'94. In: Proc. of Second Intl. Workshop on Fast Software Encryption, Springer-Verlag, 1994. 359～362

19 Salvail L. Quantum bit commitment from a physical assumption, Crypto'98, Springe-Veralg, Berlin, 1998. 338～353

20 Yao A C. Protocols for secure computations, 23rd STOC. In: Proc. of the IEEE 23rd Annual Symposium on the Foundation of Computer Science, 1982. 160～164

（上接第159页）

参 考 文 献

1 叶俊勇，汪同庆，杨波，等. 皮鞋内腔 CT 测量仪的扫描运动控制系统. 重庆大学学报，2001，24(6)：108～112

2 程正兴. 小波分析算法与应用. 西安交通大学出版社，1998. 31～40

3 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7): 674～693

4 Mallat S. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE transactions on Acoustic. Speech and Signal Processing, 1989, 37(12): 2091～2110

5 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983

6 Pentland A P. Fractal-Based Description of Nature Scenes. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1984, 6 (6): 661～674

7 Peleg S, Naor J, Hartley R, Avnir D. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 1984, 6 (4): 518～523

8 Keller J M, Chen S, Keller J M. Texture Description and Segmentation Through Fractal Geometry. Computer Vision Graphics Image Processing, 1989, 45: 150～166

9 Sarkar N, Chaudhuri B B. An Efficient Approach to Estimate Fractal Dimension of Textural Images. Pattern Recognition, 1992, 25(9): 1035～1041

10 Jin X C, et al. A Practical Method for Estimating Fractal Dimension. Pattern Recognition Letters, 1995, 16: 457～464

11 应宇铮，石青云. 实数域上的盒数计算与分形维数估计. 模式识别与人工智能，1997，10(4)：357～361