Vague 相似度量与 Vague 熵

Similarity Measures and Entropy for Vague Sets

李艳红[1] 迟忠先[1] 阎德勤[2]

(大连理工大学计算机科学与工程系[1],辽宁师范大学计算机系[2] 大连116024)

Abstract The paper draws comparison and analysis among present similarity measure methods in the case of similarity measures between Vague values, provides a new similarity measure method, of which discusses on the normal characteristics, gives some relative character theorems. At the same time, it analyzes the application of fuzzy similarity measures in vague similarity measures and gives its normal forms such as similarity measures between Vague sets, between elements and their weighted similarity measures. Finally, vague entropy rule respectively aiming at two kinds of cases is approached and its corresponding vague entropy expressions is provided. The content of this paper is of practical significance in such fields as fuzzy decision-making, vague clustering, pattern recognition, data mining etc.

Keywords Similarity measure, Vague sets, Vague entropy, Fuzzy sets

德国数学家 G. Contor 于19世纪创建了经典集合论,集合中的元素只能在{0,1}中取值,无法处理具有模糊性和不确定性的信息和数据。Zadeh 于1965年提出了模糊集合论[1],将集合中的元素定义在[0,1]区间中取值,为我们描述世界提供了一个更符合实际的方法和工具。1993年 Gau 和 Buehrer 提出了 Vague 集[2]的概念(与 Atanassov 提出的直觉模糊集[3]的概念相同)将集合中元素的取值定义为[0,1]中的一个子区间,进一步加强了对客观世界描述的真实程度。Vague 集是一个有着广泛应用前景的理论,目前国外已有些学者将此技术应用于模糊控制、决策、故障诊断等方面的研究,并取得了比模糊集技术好得多的效果[8]。

自从 Zadeh 提出了模糊集合论后相似度量就成了衡量两个集合之间和两个元素之间相似程度的重要工具,许多人从不同的角度研究了这个问题。本文在此基础上作了点研究工作,同时探讨了有关的 Vague 熵问题。在展开讨论之前先介绍一些相关知识。

1 基础知识

1.1 相关定义

定义1(模糊集)[8] 论域 U 中的模糊集合 A 可用一个集合来定义

$$A=\{(x,\mu_A(x))\,|\,x\in A,\mu_A(x)\in[0,1]\}$$

$\mu_A(x)$是隶属函数,它表示 A 中任意一个元素 x 属于模糊集 A 的程度。它将 A 中任意元素 x 与区间[0,1]中某个实数 $\mu_A(x)$联系起来,$\mu_A(x)$的值越大,表明该元素 x 属于集合 A 的程度越高。$\mu_A(x)$既包含了支持 x 的证据,也包含了反对 x 的证据,不可能表示其中一个,更不可能同时表示支持和反对的证据,Vague 集解决了它存在的问题。

定义2(vague 集)[8] 令 U 是一个点(对象)空间,其中的任意一个元素用 x 表示,U 中的一个 Vague 集 V 用一个真隶属函数 $t_v(x)$和一个假隶属函数 $f_v(x)$表示,$t_v(x)$是从支持 x 的证据所导出的 x 肯定隶属度下界,$f_v(x)$则是从反对 x 的证据所导出的 x 否定隶属度下界。$t_v(x)$和 $f_v(x)$将区间[0,1]中的一个实数与 U 中的每一个点联系起来,简写即 $t_v:U\rightarrow[0,1]$;$f_v:U\rightarrow[0,1]$

其中 $t_v+f_v\leqslant 1$。可见它将 x 的隶属度限制在[0,1]的一个子区间$[t_v,1-f_v]$内。

关于 x 的不确定性可以用差$1-t_v(x)-f_v(x)$来表征,差值大小表明我们精确知道 x 的程度多少。如果 $t_v(x)=1-f_v(x)$,表明我们精确地知道 x,此时,Vague 集退化为模糊集;如果 $t_v(x)$和$1-f_v(x)$同时为1或0,此时关于 x 的信息是很精确的,Vague 集退化为经典集合。

定义3 一个 Vague 集为空,当且仅当它的真隶属函数和假隶属函数在 U 上恒等于0。

定义4 一个 Vague 集 A 的补 $\bar{A}$ 定义为:$t_{\bar{A}}=f_A$,$1-f_{\bar{A}}=1-t_A$。

定义5 两个 Vague 集 A 和 B 是相等的,即 $A=B$,当且仅当 $t_A=t_B$,$1-f_A=1-f_B$。

1.2 当前相似度量方法

模糊集之间或元素之间的相似度量可用于智能推理系统中检查两个知识模式是否完全一致或近似一致、用于数据挖掘系统中确定概念间的函数依赖关系、聚类等方面,在实践中具有一定意义。从以上定义可见 Vague 集是模糊集合和经典集合相应定义的推广,所以研究 Vague 集的相似度量具有更重要的意义。为简便起见,在论述思路上本文以研究 Vague 值之间的相似度量展开讨论,而后再自然扩展到 Vague 集之间和元素之间的相似度量。

令 $x=[t_x,1-f_x]$,$y=[t_y,1-f_y]$是论域 U 上的两个 Vague 值,Chen[4,5]定义了 x、y 之间的相似度量 M_C 如下:

$$M_C(x,y)=1-\frac{|S(x)-S(y)|}{2}=1-\frac{|(t_x-t_y)-(f_x-f_y)|}{2} \tag{1}$$

其中 $S(x)=t_x-f_x$、$S(y)=t_y-f_y$ 分别是 x、y 的核,显然 $S(x)\in[-1,1]$,$S(y)\in[-1,1]$。

李艳红 博士研究生,主研方向:数据仓库和数据挖掘。**迟忠先** 教授,博士生导师,主研领域:对象建模方法及应用、数据仓库及数据挖掘等。**阎德勤** 博士,副教授,主研领域:模式识别、图像和信息处理等。

Chen 认为，$M_C(x,y)$越大，x、y 之间的相似程度越大。但当 $x=[0,1]$，$y=[0.5,0.5]$时，基于公式(1)得 $M_C(x,y)=1$，表明 x、y 之间有许多相似性或完全相似，这显然不符合直观感觉，基于 Vague 集之间或元素之间的相似度量也存在类似问题。Dug Hun Hong 在文[6]、李凡在文[7]中均提及了此反例，并分别提出如下新的相似度量 M_H、M_L，较好地解决了此问题。

$$M_H(x,y)=1-\frac{|t_x-t_y|+|f_x-f_y|}{2} \tag{2}$$

$$M_L(x,y)=1-\frac{|S(x)-S(y)|}{4}-\frac{|t_x-t_y|+|f_x-f_y|}{4} \tag{3}$$

2 当前相似度量方案比较分析

影响两个 Vague 值之间相似程度的因素有三个：真隶属度 t_x，假隶属度 f_x 和未知值(弃权)$1-t_x-f_x$，未知值函数依赖于前两者。我们从公式(1)、(2)、(3)的一般化形式分析入手。为便于方法间的比较分析，选择了几个特殊点如表1。显然，直观上理解1和2、4和5、6和7对数据的结果是 $M(x_1,y_1)>M(x_2,y_2)$、$M(x_5,y_5)>M(x_4,y_4)$、$M(x_7,y_7)>M(x_6,y_6)$。

表1 各种相似度量方法分析比较表

	1	2	3	4	5	6	7
x	[0.3,0.7]	[0.3,0.6]	[0.3,0.8]	[1,1]	[0.5,0.5]	[0.4,0.8]	[0.4,0.8]
y	[0.4,0.6]	[0.4,0.7]	[0.4,0.7]	[0,1]	[0,1]	[0.5,0.7]	[0.5,0.8]
$M_C(x,y)$	1	0.9	1	0.5	1	1	0.95
$M_H(x,y)$	0.9	0.9	0.9	0.5	0.5	0.9	0.95
$M_L(x,y)$	0.95	0.9	0.95	0.5	0.75	0.95	0.95
$M_O(x,y)$	0.9	0.9	0.9	0.3	0.5	0.9	0.93

令 $x=[t_x,1-f_x]$，$y=[t_y,1-f_y]$是论域 U 上的两个 Vague 值，Chen 在文[4,5]中通过加权值函数 $S_W^C(x)=a*t_x+b*f_x+c*(1-t_x-f_x)$和 $S_W^C(y)=a*t_y+b*f_y+c*(1-t_y-f_y)$定义了 Vague 值 x、y 的加权值。a、b、c 分别代表真隶属度、假隶属度、未知部分的权重，$a\geqslant c\geqslant 0\geqslant b$，Chen 定义 x、y 之间的加权相似度量 M_W^C 如下：

$$M_W^C(x,y)=1-\frac{|S_W^C(x)-S_W^C(y)|}{a-b}=1-\frac{|a*(t_x-t_y)+b*(f_x-f_y)+c*\{(t_y+f_y)-(t_x+f_x)\}|}{a-b} \tag{4}$$

若 a、b、c 分别取1、—1、0，那么 $M_W^C(x,y)=M_C(x,y)$。可见 M_C 侧重于不考虑弃权情况下对 Vague 值所代表的支持度的重视，即我们认为核 $S(x)=t_x-f_x$ 暗示的是支持 x 隶属于某一概念的程度，在这里我们叫它支持度，它与后面讨论的熵的概念有关。对 M_C 而言，当 $t_x-f_x=t_y-f_y\Rightarrow M_C\equiv 1$(证明略)，即只要两个 Vague 值的真假隶属度差值相等，他们就完全相似，这其中蕴含 $x=y$(即 $t_x=t_y$，$f_x=f_y$)的情况，也包含其它类似于上述反例和表1中1、3、5、6对数据这种只是真假隶属度差值相同的情况，所以 M_C 方法对 $t_x-f_x=t_y-f_y$ 类数据的处理过于粗糙，甚至出现明显违背直觉的反例。

Dug Hun Hong 在文[6]中提出了改进的加权相似度量：

$$M_W^H(x,y)=1-\frac{a*|t_x-t_y|+b*|f_x-f_y|+c*|(t_y+f_y)-(t_x+f_x)|}{a+b+c} \tag{5}$$

$a,b,c\geqslant 0$，当 a、b、c 分别取1、1、0时，$M_W^H(x,y)=M_H(x,y)$。可见 M_H 侧重于对两个 Vague 值之间真隶属度差值、假隶属度差值的同等重视。真隶属度差值和假隶属度差值分别相同的 Vague 值对的相似程度相同，但尚未区分每个 Vague 值对真隶属度间、假隶属度间的正向差别和反向差别，也未考虑弃权的差别，所以它认为表1中的1、2、3、6对数据相似程度相同，也不能区分4、5对数据，尚有一定的局限性。

而 M_L 继承了 M_C、M_H 的优点，表示了对 Vague 值支持度和真、假隶属度值的同等关注，同 M_C 一样，与 M_H 相比显示出了 Vague 值对在同等真隶属度差距、假隶属度差距的情况下，对 $t_A\leqslant t_B$，$1-f_A\geqslant 1-f_B$ 型数据的偏好倾向，本质上是加强了对隶属度间正向差距和反向差距的区分，与 M_H 相比，对表1中的1、2对，4、5对数据区分能力较强，比较符合直观感觉，但也尚未完全避免 M_C、M_H 局限性，它认为 Vague 值[0.4,0.8]与[0.5,0.7]、[0.5,0.8]的相似程度相同(如表1中6、7对数据)，显然不符合直观。

M_C、M_H 和 M_L 分别是侧重于不同角度提出的相似度量方法，目前还尚未找到一种完全符合客观事实和直观感觉、不存在反例的相似度量方法，在实践中应根据应用需要进行选取。下部分本文从另一角度提出一种新的相似度量方法。

3 一种新的 Vague 相似度量及其特征

令 $x=[t_x,1-f_x]$，$y=[t_y,1-f_y]$是论域 U 上的两个 Vague 值，$t_x\in[0,1]$，$f_x\in[0,1]$，$t_y\in[0,1]$，$f_y\in[0,1]$，$t_x+f_x\leqslant 1$，$t_y+f_y\leqslant 1$。定义 x、y 之间的相似度量 M_O 如下：

$$M_O(x,y)=1-\sqrt{\frac{(t_x-t_y)^2+(f_x-f_y)^2}{2}}=1-\sqrt{\frac{(t_x-f_x)^2+(t_y-f_y)^2-2(t_x-f_y)(t_y-f_x)}{2}} \tag{6}$$

由上述定义，我们可以得到如下性质：

性质1 $M_O(x,y)\in[0,1]$

证明：由于 $t_x\in[0,1]$，$f_x\in[0,1]$，$t_y\in[0,1]$，$f_y\in[0,1]$，有$(t_x-t_y)^2\leqslant 1$，$(f_x-f_y)^2\leqslant 1$，所以 $M_O(x,y)\leqslant 1-\sqrt{\frac{0^2+0^2}{2}}=1$，$M_O(x,y)\geqslant 1-\sqrt{\frac{1^2+1^2}{2}}=0$，即 $M_O(x,y)\in[0,1]$。

性质2 $M_O(x,y)=M_O(y,x)$(由 $M_O(x,y)$定义即可证明)

性质3 $M_O(x,y)=0\Leftrightarrow x=[0,0]$ $y=[1,1]$或 $x=[1,1]$ $y=[0,0]$

证明：若 $x=[0,0]$ $y=[1,1]$或 $x=[1,1]$ $y=[0,0]$，由定义显然有 $M_O(x,y)=0$；若 $M_O(x,y)=0\Rightarrow(t_x-t_y)^2+(f_x-f_y)^2=2$，由于$(t_x-t_y)^2\leqslant 1$，$(f_x-f_y)^2\leqslant 1$，故有 $t_x-t_y=\pm 1$，$f_x-f_y=\mp 1$，从而有 $x=[0,0]$ $y=[1,1]$或 $x=[1,1]$ $y=[0,0]$。

性质4 $M_O(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$

证明：若 $x=y$，由定义知 $t_x=t_y$，$f_x=f_y$，显然由定义知 $M_O(x,y)=1$；若 $M_O(x,y)=1\Rightarrow(t_x-t_y)^2+(f_x-f_y)^2=0$，由于$(t_x-t_y)^2\leqslant 1$，$(f_x-f_y)^2\leqslant 1$，故有，$t_x-t_y=0$，$f_x-f_y=0$，由定义5知 $x=y$。

M_O 体现了对两个 Vague 值间真隶属度差距、假隶属度差距的重视，同时蕴含着对 Vague 值支持度的重视。M_O 避免了 M_C 的局限性。同 M_H 一样，它也不能区分类似于1、2、3类的数据(如表1)，但对4、5类数据有区分能力，而 M_H 对4、5类数据无区分能力，这是 M_O 比 M_H 进步的地方。M_O 对6、7类数据有区分能力(如表1)，这是 M_O 比 M_L 进步的地方。

4 相似度量函数的基本性质探讨

基于现有 Vague 相似度量方法，本文研究总结出理想状

况下 Vague 相似度量应具有的四条性质和两个性质定理如下。首先令 $x=[t_x,1-f_x]$，$y=[t_y,1-f_y]$是论域 U 上的两个 Vague 值，M 定义了 x、y 之间的相似度量。

性质5 $M(x,y)\in[0,1]$

性质6 $M(x,y)=M(y,x)$

性质7 $M(x,y)=0\Leftrightarrow x=[0,0]$ $y=[1,1]$或 $x=[1,1]$ $y=[0,0]$

性质8 $M(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$

M_C，M_H 显然具有性质5、6、7(证明略)，前文已说明 M_C 不具有性质8，文[6]证明了 M_H 具有性质8。前部分证明了 M_O 具有性质5、6、7、8。M_L 在文[7]中以定理的形式证明了其具有性质5、6、7，我们来证明其具有性质8：根据定义5，显然，$x=y\Rightarrow M_L(x,y)=1$；当 $M_L(x,y)=1$时，有 $|(t_x-t_y)-(f_x-f_y)|+|t_x-t_y|+|f_x-f_y|=0\Rightarrow|(t_x-t_y)-(f_x-f_y)|=0$ 且 $|t_x-t_y|=0$且 $|f_x-f_y|=0\Rightarrow t_x=t_y$ 且 $f_x=f_y\Rightarrow x=y$，得证。

Vague 集将集合中元素的取值定义为[0,1]中的一个子区间，即一个区间数，为便于说明中点对称定理，我们引入并拓展区间数中象的概念如下：

定义6(象) 对于一个区间数 $A=[a_1,a_2]$，它的象 $A_0^-=[a_1,a_2]_0^-=[-a_2,-a_1]$。它是关于 $x=0$的象，关于 $x=0.5$的象如我们给出的推论1。

推论1 对于一个区间数 $A=[a_1,a_2]$，它关于 $x=0.5$的象 $A_{0.5}^-=[a_1,a_2]_{0.5}^-=[1-a_2,1-a_1]$。

推论2 Vague 值 y 关于 $x=0.5$的象是 $y_{0.5}^-$，它的补是 $\overline{y}$，有 $y_{0.5}^-=\overline{y}$ 成立。(证明略)

M_C、M_H、M_L、M_O 都满足如下性质定理，证明略。

性质定理1(中点对称定理) $M(x,y)=M(x_{0.5}^-,y_{0.5}^-)$

推论3(补集定理) $M(x,y)=M(\overline{x},\overline{y})$(由性质定理1和推论2即可证明)

性质定理2(平移定理) x、y 同向平移 $\Delta d(0\leqslant\Delta d\leqslant1)$得 x'、y'，即 $x'=[t_x+\Delta d,1-f_x+\Delta d]$，$y'=[t_y+\Delta d,1-f_y+\Delta d]$，有 $M(x,y)=M(x',y')$。

5 有关 Vague 相似度量的一般化形式

为便于阐述，以上讨论都是以 Vague 值为例的。本节我们扩展基于 Vague 相似度量的有关问题，给出 Vague 相似度量的一般化形式如5.1、5.2、5.3节。前部分讨论的方法和性质对它们都适用，为节省空间本部分不再进行说明和证明。

5.1 Vague 集间的相似度量和加权相似度量

假定 A 和 B 是论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$上的两个 Vague 集，其中 $A=\sum_{i=1}^{n}[t_A(u_i),1-f_A(u_i)]/u_i$，$B=\sum_{i=1}^{n}[t_B(u_i),1-f_B(u_i)]/u_i$。假定 $V_A(u_i)=[t_A(u_i),1-f_A(u_i)]$表示 Vague 集 A 中 u_i 的隶属度值，$V_B(u_i)=[t_B(u_i),1-f_B(u_i)]$表示 Vague 集 B 中 u_i 的隶属度值。令 M 代表现有的相似度量函数。

Vague 集 A 和 B 的相似程度可由下面的函数计算得到：

$$T(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(V_A(u_i),V_B(u_i)) \tag{7}$$

$T(A,B)$的值越大，表明 Vague 集 A 和 B 的相似程度越大。假定论域 U 上的元素 u_i 的权重为 ω_i，$\omega_i\in(0,1]$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 A 和 B 之间的加权相似度量按下式计算：

$$W(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\omega_iM(V_A(u_i),V_B(u_i))/\sum_{i=1}^{n}\omega_i \tag{8}$$

$W(A,B)$的值越大，Vague 集 A 和 B 的相似程度越大。当 $\omega_i=1$时，公式(8)即是公式(7)。

5.2 Vague 元素间的相似度量和加权相似度量

假定 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$上的 Vague 集，其中 $A_1=\sum_{i=1}^{n}[t_{A_1}(u_i),1-f_{A_1}(u_i)]/u_i$，$A_2=\sum_{i=1}^{n}[t_{A_2}(u_i),1-f_{A_2}(u_i)]/u_i$，$\cdots A_m=\sum_{i=1}^{n}[t_{A_m}(u_i),1-f_{A_m}(u_i)]/u_i$。假定 $V_{A_k}(u_i)=[t_{A_k}(u_i),1-f_{A_k}(u_i)]$表示 Vague 集 A_k 中 u_i 的隶属度值，$V_{A_k}(u_j)=[t_{A_k}(u_j),1-f_{A_k}(u_j)]$表示 Vague 集 A_k 中 u_j 的隶属度值。M 代表现有的相似度量函数。

论域 U 上 Vague 集 A_k 中($1\leqslant k\leqslant m$)的两个元素 u_i、u_j 间的相似度量如下：

$$S_e(u_i,u_j)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M(V_{A_k}(u_i),V_{A_k}(u_j)) \tag{9}$$

$S_e(u_i,u_j)$的值越大，表明元素 u_i 和 u_j 相似程度越大。

假定 Vague 集 A_k 的权重为 ω_k，$\omega_k\in(0,1]$，$1\leqslant k\leqslant m$，则 u_i 和 u_j 之间的加权相似度量按下式计算：

$$W_e(u_i,u_j)=\sum_{k=1}^{m}\omega_kM(V_{A_k}(u_i),V_{A_k}(u_j))/\sum_{k=1}^{m}\omega_k \tag{10}$$

$W_e(u_i,u_j)$值越大，元素 u_i 和 u_j 相似程度越大。当 $\omega_k=1$时，公式(10)等于公式(9)。

5.3 Fuzzy 相似度量在 Vague 相似度量中的应用

某些 Vague 相似度量公式可由模糊集的相似度量公式推导(仍以 Vague 值间的相似度量为例)。在模糊集中，衡量两个模糊集合 A 和 B 之间的贴近程度，可以采用闵可夫斯基距离。若论域 X 为$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则闵可夫斯基贴近度是：

$$m(A,B)=1-((\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^q)/n)^{1/q}$$

$\mu_A(x_i)$是 x_i 隶属于模糊概念 A 的程度，$\mu_B(x_i)$是 x_i 隶属于模糊概念 B 的程度。当 $q=1$时，上式是海明贴近度，$q=2$时，是欧几里得贴近度。可以把论域 X 上的 Vague 值对 $x=[t_x,1-f_x]$，$y=[t_y,1-f_y]$之间的相似程度看作是具有 t、$1-f$ 两个属性的 x、y 元素之间的模糊相似程度，即 $n=2$，则有

$$M(x,y)=1-\left[\frac{|t_x-t_y|^q+|f_x-f_y|^q}{2}\right]^{1/q}$$

当 $q=1$时，$M(x,y)=M_H(x,y)$；$q=2$时，$M(x,y)=M_O(x,y)$。可见可以把某些模糊相似度量方法灵活运用于 Vague 值(集、元素)间的相似度量。另外，当 $t_v(x)=1-f_v(x)$，即 Vague 集退化为模糊集时，Vague 集间的相似度量 M_c、M_H、M_L、M_O 都退化为海明贴近度的形式。这些从另一侧面表明了 Vague 集是模糊集的推广，当然要探索更合适的 Vague 相似度量方法还应结合 Vague 集自身的特点进行更深入的研究。

6 Vague 熵

熵是信息论中的一个概念，代表对象中所蕴含的平均信息量。自 Zadeh 提出模糊熵的表示以来，很多人对模糊熵进行了研究，给出了不同的模糊熵表示形式。De Luca-Termini 首次给出了非概率熵表示的准则，称为 De Luca-Termini 准则[9]，概率熵成为其准则下的一个特例。对模糊集合 A 的熵 $E(A)$，De Luca-Termini 准则是：(1)$E(A)=0$当且仅当 A 是非模糊表示(即 $\mu_A(x_i)\in\{0,1\}$；(2)$E(A)=1$当且仅当对所有 $\mu_A(x_i)=0.5$；(3)$E(A)\leqslant E(B)$成立条件：$\mu_B(x)\leqslant0.5$时，$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$；$\mu_B(x)\geqslant0.5$时，$\mu_A(x)\geqslant\mu_B(x)$；(4)$E(A)=E(\overline{A})$($\overline{A}$ 为 A 的补集)。学者们深入地研究了模糊熵，而对于 Vague 熵的研究尚未见报道。本部分针对 Vague 集的特点基

于重视弃权的不同考虑给出两种非概率 Vague 熵准则及相应的熵表达式。首先令 A 和 B 是论域 $U=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$ 上两个 Vague 集，定义同本文5.1节。

6.1 Vague 熵准则 I 及相应的一种 Vague 熵

Vague 熵准则 I 如下：

(1)$\check{E}(A)=0$，当且仅当对所有 μ_i，$|t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)|=1$

(2)$\check{E}(A)=1$，当且仅当对所有 μ_i，$t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)=0$

(3)$\check{E}(A)\leqslant\check{E}(B)$成立条件

$|t_A(\mu)-f_A(\mu)|\geqslant|t_B(\mu)-f_B(\mu)|$

(4)$\check{E}(A)=\check{E}(\overline{A})$

当 $t_A(\mu_i)=f_A(\mu_i)$时，$\check{E}(A)$为最大值1，类似于文[10]确定模糊熵的思路，我们从$[t_A(\mu_i),f_A(\mu_i)]$与 $\check{E}(A)$最大值时的$[t_A(\mu_i),t_A(\mu_i)]$贴近程度的角度得出响应 Vague 熵准则 I 的相应一种 Vague 熵表达式如下：

定义7 $\check{E}(A)=1-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}|t_A(\mu_i)-f_A(u_i)|^p)^{1/p}$是 Vague 熵准则 I 的熵。(易于验证，证略)

Vague 熵准则 I 是从不细化分析弃权或以概率的形式细化分析弃权的角度给出的熵准则。可以这样理解：为细化分析弃权蕴含的意义，引入两个参数 ω_t、ω_f，ω_t 代表弃权人群中有赞同倾向而因压力或私利等原因作弃权决定的人的百分比，ω_f 代表弃权人群中有反对倾向的人的百分比，$\omega_t+\omega_f\leqslant1$。此时新的真、假、弃权部分隶属度值 $t'_A(\mu_i)$、$f'_A(\mu_i)$、$1-t'_A(\mu_i)-f'_A(\mu_i)$分别为：$t'_A(\mu_i)=t_A(\mu_i)+\omega_t(1-t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i))$、$f'_A(\mu_i)=f_A(\mu_i)+\omega_f(1-t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i))$、$1-t'_A(\mu_i)-f'_A(\mu_i)=(1-\omega_t-\omega_f)(1-t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i))$。细化分析弃权后的结果 $t'_A(\mu_i)$、$f'_A(\mu_i)$、$1-t'_A(\mu_i)-f'_A(\mu_i)$仍适用 Vague 熵准则 I 及相应的 Vague 熵定义7，不细化分析弃权情况即 $\omega_t=\omega_f=0$。另外，当 $t_A(\mu_i)+f_A(\mu_i)=1$或 $\omega_t+\omega_f=1$(即 $t'_A(\mu_i)+f'_A(\mu_i)=1$)时，Vague 熵准则 I 演化为 De Luca-Termini 准则(即 De Luca-Termini 准则是 Vague 熵准则 I 的特例)，定义7演化为文[10]提出的模糊熵 R_p。另外值得一提的是，从熵的角度来看，前文所研究的模糊相似度量 M_C 和 M_L 融入了对 Vague 值所蕴含的平均信息量的重视。

6.2 Vague 熵准则 I 及相应一种 Vague 熵

Vague 熵准则 I 如下：

(1)$\hat{E}(A)=0$，当且仅当对所有 μ_i，$|t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)|=1$

(2)$\hat{E}(A)=1$，当且仅当对所有 μ_i，$t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)=0$且$1-t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)=1$

(3)当$|t_A(\mu)-f_A(\mu)|-(1-t_A(\mu)-f_A(\mu))\geqslant|t_B(\mu)-f_B(\mu)|-(1-t_B(\mu)-f_B(\mu))$时，$\hat{E}(A)<\hat{E}(B)$

(4)$\hat{E}(A)+\hat{E}(\overline{A})$

定义8 $\hat{E}(A)=1-\frac{1}{2n}(\sum_{i=1}^{n}[t_A(\mu_i)-f_A(\mu_i)|+(t_A(\mu_i)+f_A(\mu_i))])$是 Vague 熵准则 I 下的熵。(证略)

此处是发自于对弃权对象绝对重视的观点，实质上是基于真假差距削弱弃权的考虑。

本节给出了两种 Vague 熵准则和相应的 Vague 熵，具体应用时应根据需要进行选取。

结论和展望 Vague 集考虑了弃权的因素，但现有的 Vague 相似度量方法中并未深入彻底地考虑弃权的发展趋向或动向。为了使结果与真实情况更加接近，应重视对弃权部分的细致分析，深入研究弃权者的心理态势，这是改进现有 Vague 相似度量方法的渠道之一。另外当前方法都建立在距离基础上，只能表示 Vague 集之间和元素之间总的距离，无法表示 Vague 集之间最小的相似性和元素之间最大的相似性，可以尝试把模糊集的一些研究成果灵活地运用于 Vague 集，进一步推进对 Vague 相似度量的研究。

总之，本文讨论了 Vague 值(集或元素)之间的相似度量问题，假定有 n 个元素：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，且分为 n 组：$A_1,A_2,\cdots,A_n$，我们不清楚 x_i 和 A_i 的情况，仅知道每个元素在多大程度上包含在每个组中，那么本文讨论的方法可以较好地回答：1，任意两个组 A_i 和 $A_j(i\neq j)$在多大程度上可以组合在一起?2，x_i 和 $x_j(i\neq j)$有多大可能属同一类?这种解决问题的方法可以广泛应用在协商、投票、市场定位、管理、方案评估模型中。另外，基于对弃权对象的不同考虑，本文还给出了两种 Vague 熵准则和相应的 Vague 熵，它们对 Vague 集的研究和应用有实际意义，在此希望抛砖引玉，引发对它的深入探讨。

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Fuzzy sets. Inform. and Control, 1965, 8: 338～356

2 Gau W L, Buehrer D J. Vague sets. IEEE Trans, Syst. Man, Cybern, 1993, 23(2): 610～614

3 Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets Syst, 1986, 20(1): 87～96

4 Chen S M. Measures of similarity between vague sets. Fuzzy Sets Syst, 1995, 74(2): 217～223

5 Chen S M. Similarity measures between vague sets and between elements. IEEE Trans, Syst. Man, Cybern, 1997, 27(1): 153～158

6 Hong D H, Kim C. A note on similarity measures between vague sets and between elements. Information Science, 1999, 115: 83～96

7 李凡，徐章艳. Vague 集之间的相似度量. 软件学报, 2001, 12(6): 922～927

8 李凡. 模糊信息处理系统. 北京：北京大学出版社, 1998

9 Luca A D, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Inform. and Control, 1972, 20: 301～312

10 Deqin Y. A new approach on information measures for fuzzy sets. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2001, 14(1): 23～27

(上接第134页)

类算法的性能，并进一步探讨将本文的方法在数据挖掘及基于强化学习的智能控制中应用的可能性。

参 考 文 献

1 Kaelbing L, Littman M, Moore A. Reinforcement Learning: A Survey. Journal of Artificial Intelligence Research, 1996, 4: 237～285

2 Barto A G, Anandan P. Pattern Recognizing Stochastic Learning Automata. IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics, 1985, 15: 360～375

3 Williams R J. Simple statistical Gradient-Following Algorithms for Connectionist Reinforcement Learning. Machine Learning, 1992, 8: 229～256

4 Ahalt S C, et al. Competitive Learning Algorithms for Vector Quantization. Neural Networks, 1990, 3: 277～291

5 张智星，孙春在，水谷英二. 神经-模糊和软计算. 张平等译，西安交通大学出版社, 2002. 2