

广义 Mandelbrot 和 Julia 组合集^{*})

General Mandelbrot and Julia Combination Sets

王兴元

(大连理工大学电子与信息工程学院 大连116024)

Abstract Based on the switched mapping advanced by author, the method constructing the general Mandelbrot and Julia combination sets was elaborated, and a series of the general Mandelbrot and Julia combination sets were constructed. The trajectories of a starting point in the complex z -plane under switch mapping were analyzed, the construction characteristics of the general Mandelbrot and Julia combination sets were described. The algorithm constructing the general Mandelbrot and Julia combination sets was researched, the conclusions that the evolutions of the general Mandelbrot and Julia combination sets rely on the choice of principal range for the phase angle were given.

Keywords The general Mandelbrot and Julia combination sets, Fractal, Evolution

1 引言

复映射 $f: Z \leftarrow z^2 + c$ ($\alpha=2$) 对不同的 c 值 ($c \in C$), 经过迭代能生成各种形状奇特的分形, 这些集合被称为 Julia 集。而如果根据不同的 c 值对应的 Julia 集的连通性对参数 c 进行分类, 还可在参数空间做出称为 Mandelbrot 集的 c 的点集^[1]。目前人们对 Mandelbrot 集和 Julia 集已进行了深入研究, 发现其中深藏着规律性的结构, 从而大大丰富了分形理论^[2]。1987年后, Lakhtakia 和 Gujar 等人先后研究了 $\alpha \in R^1$ 时的广义 M 和 J 集, 并根据广义 M 和 J 集的视觉结构特点提出了几点假设^[3-5]。在此基础上, Dhurandhar 和作者先后探讨了广义 M 和 J 集的分形结构, 提出了广义 M 和 J 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律^[6-9]。联想具有分形吸引子的简单动力系统——“面包师的”变换为一个简单的开关映射^[10], 作者试图探讨由开关映射所构造的广义 M 和 J 组合集会出现什么图形? 它们又将给我们什么启迪? 为此本文首次提出了开关复映射, 阐述了广义 M 和 J 组合集的构造方法, 并给出了一系列广义 M 和 J 组合集, 研究了广义 M 和 J 组合集的结构特征及演化过程。

2 理论与方法

利用 Montel 定理作为出发点, 可以得出由复映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$ ($\alpha \in R^1$) 所构造的广义 J 集 J_f 为 f 的斥性周期点的闭包^[11]。根据周期点的定义, 可以推出 $|\alpha| > 1$ 时 J_f 上的点为斥性的, 并且 J_f 显现出分形特征^[7]。

由复映射 $f: z \leftarrow z^2 + c$ ($\alpha \in R^1$) 构造广义 M 集, 应从 f 的临界点开始迭代。当 $\alpha > 1$ 时, f 的临界点为 0, 故取 $z_0 = 0$, 可得 $z_1 = c, z_2 = c^2 + c, \dots$; 当 $\alpha < 0$ 时, f 的临界点为 ∞ , 故取 $z_0 = \infty$, 可得 $z_1 = c, z_2 = c^2 + c, \dots$ 。因此为避免计算机溢出, 可选取迭代初始点 $z_0 = c$ 。值得注意的是, 当 $\alpha \in [0, 1]$ 时, 仍用 c 作为初始点迭代, 得到的图像不是广义 M 集。这是因为: $\alpha = 1$ 时, f 无临界点, 所以也就谈不上临界点的轨道; $0 \leq \alpha < 1$ 时, 临界点为 ∞ , ∞ 的轨道上没有参数 c , 所以从 c 开始迭代的图像不是广义 M 集^[8]。

Julia 集位于 Z 平面, 而 Mandelbrot 集位于 C 平面^[1]。由于这两个集合定义在不同平面上, 因此在组合过程中要求统一定义域。机械地组合过程可以定义在 Z 平面上。构造广义 M 和 J 组合集的开关映射为

$$\begin{cases} z_{n+1} = f(z_n) = (z_n)^\alpha + c_f, \text{广义 J 集 或 广义 M 集, } |z_n| \leq r_0 \\ z_{n+1} = g(z_n) = (z_n)^\beta + c_g, \text{广义 M 集 或 广义 J 集, } |z_n| > r_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\alpha, \beta \in R^1$ 且 $|\alpha| > 1, |\beta| > 1, r_0$ 为复映射 f 与 g 之间的开关变量。式(1)给出的广义 M 和 J 组合集有两类: 一类可称为广义 J-M 组合集, 其产生方式为 $|z_n| \leq r_0$ 时, $f(z)$ 按构造广义 J 集的方法进行迭代, 而 $|z_n| > r_0$ 时, $g(z)$ 按构造广义 M 集的方法进行迭代; 另一类可称为广义 M-J 组合集, 其产生方式为 $|z_n| \leq r_0$ 时, $f(z)$ 按构造广义 M 集的方法进行迭代, 而 $|z_n| > r_0$ 时, $g(z)$ 按构造广义 J 集的方法进行迭代。

定义1 设 $\varphi(z)$ 代表式(1), 为黎曼球 \hat{C} 上的复映射, \mathcal{O} 表示 C 中那些轨道不收敛到无穷大点的点 z 的集合, 即:

$$\mathcal{O} = \{z \in C; \{|\varphi^k(z)|\}_{k=0}^{\infty} \text{ 是有界的}\}$$

则称 \mathcal{O} 为相应于 φ 的广义 M 和 J 组合集。该定义是构造广义 M 和 J 组合集逃逸时间算法的出发点^[1]。下面给出构造广义 M 和 J 组合集的方法:

(1) 对于开关映射式(1), 设定开关变量 r_0 、视窗 W 及逃逸半径 R 和逃逸时间限制 N 。

(2) 代表开关映射式(1)的函数 $\varphi(z)$ 应满足:

$$\varphi^k(z) = \begin{cases} f(\varphi^{k-1}(z)), & |\varphi^{k-1}(z)| \leq r_0 \\ g(\varphi^{k-1}(z)), & |\varphi^{k-1}(z)| > r_0 \end{cases} \quad (2)$$

$k=1, 2, \dots, N$

定义逃逸时间函数

$$T(x) = \begin{cases} k & |\varphi^k(x)| \geq R, |\varphi^i(x)| < R, \\ & i=1, 2, \dots, k-1, k \leq N \\ 0 & |\varphi^i(x)| < R, \\ & i=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

(3) 对视窗内的任意点 z 计算 $T(z)$ 。这涉及式(1)迭代时初值的选取: 若构造广义 J-M 组合集, 则给定 c_f , 令 $c_g = z, f(z)$ 和 $g(z)$ 迭代的初值皆为 $z_0 = z$; 若构造广义 M-J 组合集,

^{*}) 本文得到国家自然科学基金(编号: 69974008)、中国博士后科学基金及辽宁省自然科学基金(编号: 972194)资助。王兴元 博士后研究人员, 副教授, 主要研究方向为混沌与分形理论及其在生物医学工程中的应用。

则令 $c_1 = z$, 给定 $c_n, f(z)$ 和 $g(z)$ 迭代的初值皆为 $z_0 = z$ 。

(4) 如果 $T(z) = 0$, 则 $z \in \mathcal{U}$, 并赋予 z 点为黑色。如果 $T(z) = k$, 则 $z \in \mathcal{U}$, 若 k 为奇数, 则赋予 z 点为白色; 若 k 为偶数, 则赋予 z 点为黑色。

(5) 重复过程 (3)~(4), 直到穷尽视窗 W 内所有的点, 即可获得广义 M 和 J 组合集的等势带图。

选取逃逸半径 $R = 30$, 逃逸时间限制 $N = 100$, 作者绘制了广义 M 和 J 组合集。根据图形结构特点, 可分两种情况来研究。

3 结果与分析

3.1 α, β 为整数

图1为整数阶广义 M 和 J 组合集的等势带图(图1e 的着

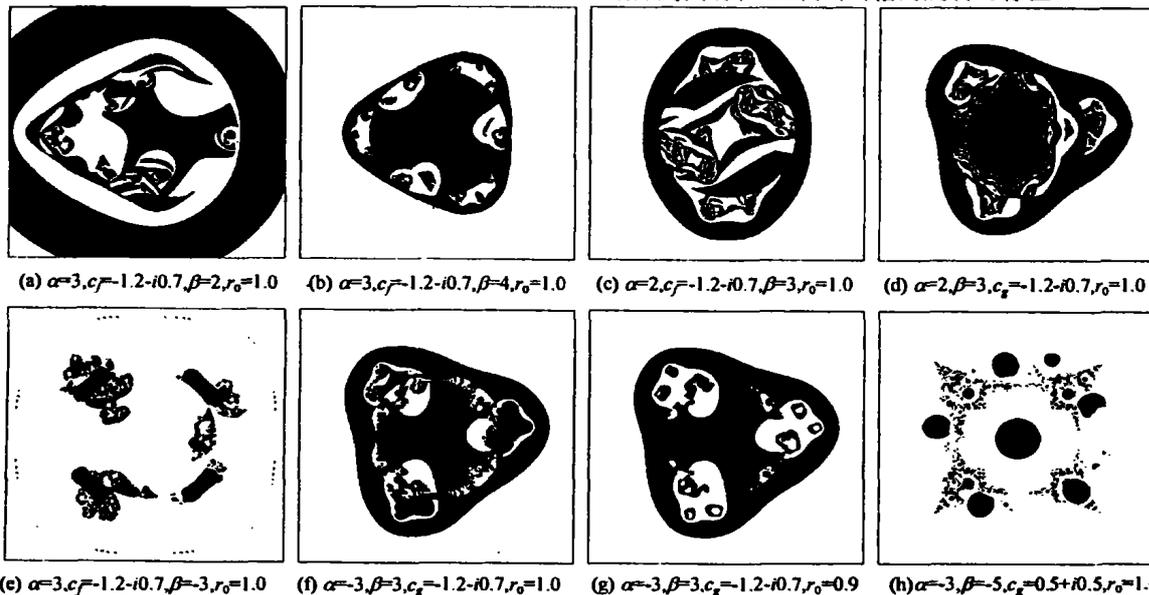


图1 整数阶广义 M 和 J 组合集

根据开关映射式(1), 可推出复 Z 平面上从 z_0 点出发的轨道为:

$$z_1 = \begin{cases} f(z_0), & |z_0| \leq r_0 \\ g(z_0), & |z_0| > r_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$z_2 = \begin{cases} f^2(z_0), & |z_0| \leq r_0 \text{ 且 } |f(z_0)| \leq r_0 \\ g(f(z_0)), & |z_0| \leq r_0 \text{ 且 } |f(z_0)| > r_0 \\ f(g(z_0)), & |z_0| > r_0 \text{ 且 } |g(z_0)| \leq r_0 \\ g^2(z_0), & |z_0| > r_0 \text{ 且 } |g(z_0)| > r_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$z_3 = \begin{cases} f^3(z_0), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f^2(z_0)| \leq r_0 \\ g(f^2(z_0)), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f^2(z_0)| > r_0 \\ f(g(f(z_0))), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g(f(z_0))| \leq r_0 \\ g^2(f(z_0)), & |z_0| \leq r_0, |f(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g(f(z_0))| > r_0 \\ f^2(g(z_0)), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f(g(z_0))| \leq r_0 \\ g(f(g(z_0))), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| \leq r_0 \text{ 且 } |f(g(z_0))| > r_0 \\ f(g^2(z_0)), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g^2(z_0)| \leq r_0 \\ g^3(z_0), & |z_0| > r_0, |g(z_0)| > r_0 \text{ 且 } |g^2(z_0)| > r_0 \end{cases} \quad (6)$$

.....

色与上述介绍的着色法刚好相反; 图1h 中黑色为逃逸区 \mathcal{U} , 白色为稳定区 \mathcal{U} 。其中图1a~1c 和1e 为广义 J-M 组合集, 图1d、1f~1h 为广义 M-J 组合集。

定理1^[6] 由复映射 $f: z \leftarrow z^a + c$ ($a \in R^1$ 且 $|a| > 1$) 构造广义 M 集, 有

$$|f^k(c)| = |f^k(ce^{i\frac{2\pi j}{\alpha}})| [k=1, 2, 3, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots, (\alpha-1)]$$

定理2^[7] 由复映射 $f: z \leftarrow z^a + c$ ($a \in R^1$ 且 $|a| > 1$) 构造广义 J 集, 有

$$f^k(z) = f^k(ze^{i\frac{2\pi j}{\alpha}}) (k, j \text{ 均为整数, 且 } 1 \leq k \leq N, 0 \leq j \leq |\alpha| - 1)$$

定理1、2表明 α 为整数的广义 M 和 J 集的中心为原点, 且分别具有 $|\alpha-1|$ 和 $|\alpha|$ 倍的旋转对称性。

定义1表明广义 M 和 J 组合集是指使这一迭代序列 z_0, z_1, z_2, \dots 有界的复数 z_0 的集合。从上述分析可知当 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 1$ 时, 若 z_0 表示原点或其邻域中的一点, 则 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots$; 若 z_0 表示距原点的距离大于1并远大于 r_0 的点中的一点, 则 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), g^2(z_0), \dots$ 。故根据定理1, 可知广义 J-M 组合集的中心区域具有 α 倍的旋转对称性, 而远离原点的外环区域则具有 $(\beta-1)$ 倍的旋转对称性(图1a~1c)。而广义 M-J 组合集部分区域的旋转对称性与此相反(图1d)。

当 $\alpha > 1$ 和 $\beta < -1$ 时, 则原点或其邻域中的某点 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots$; 距原点的距离大于 r_0 的外环中的某点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), \dots, f(g^m(z_0)), \dots$ (m 为整数且 $m \geq 1$)。此时对于广义 J-M 组合集仅中心区域具有 α 倍的旋转对称性(图1e)。而广义 M-J 组合集的中心区域应具有 $(\alpha-1)$ 倍的旋转对称性。

当 $\alpha < -1$ 和 $\beta > 1$ 时, 则原点或其邻域中的某点 z_0 的轨道应为 $z_0, f(z_0), \dots, g(f^n(z_0)), \dots$ (n 为整数且 $n \geq 1$); 距原点的距离大于 r_0 的外环中的某点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), g^2(z_0), \dots$ 。此时广义 M-J 组合集仅外环区域具有 β 倍的旋转对称性(图1f、1g)。而广义 J-M 组合集的外环区域应具有 $(\beta-1)$ 倍的旋转对称性。

当 $\alpha < -1$ 和 $\beta < -1$ 时, 则原点或其邻域中的某点 z_0 的轨

道应为 $z_0, f(z_0), \dots, g(f^p(z_0)), \dots$ (p 为整数且 $p \geq 1$); 距原点的距离大于 r_0 的外环中的某点 z_0 的轨道应为 $z_0, g(z_0), \dots, f(g^q(z_0)), \dots$ (q 为整数且 $q \geq 1$)。此时广义 M 和 J 组合集的部分区域不具有旋转对称性(图 1h)。

另外也可推出 r_0 越大, 广义 M-J 组合集与式(1)的第一式所构造的广义 M 集越相似; 反之则与式(1)的第二式所构造的广义 J 集越相似(图 1f, 1g)。对广义 J-M 组合集亦如此。

令 V_f 和 V_g 分别表示复 Z 平面 $|z| \leq r_0$ 和 $|z| > r_0$ 的区域, 当 $\alpha > 1$ 和 $\beta > 1$ 时(α, β 可为整数或小数), 根据上述对 z_0 点轨道的分析, 可得出如下结论: ①存在于 V_f 内的映射 f 的稳定区, 在由映射式(1)所构造的广义 M 和 J 组合集中再次准确出现。②存在于 V_g 内的映射 g 的稳定区, 在由映射式(1)所构造的广义 M 和 J 组合集中再次准确出现。③如在映射 g 的作用下, 点 $z_{0g} \in V_g$ 的轨道趋于无穷, 则在映射式(1)的作用下, 点 z_{0g} 的轨道将不穿过圆 $|z| = r_0$, 而趋于无穷。④如在映射 f 的作用下, 点 $z_{0f} \in V_f$ 的轨道趋于无穷, 则该轨道一定于某点 z' 处穿过圆 $|z| = r_0$ 。如 $f(z') \in V_g$ 且 $f(z')$ 满足③中 z_{0g} 所需的条件, 则在映射式(1)的作用下, z_{0f} 的轨道也将趋于无穷。⑤复 Z 平面上其它初始点, 在映射式(1)的作用下, 其轨道是很复杂的, 一些点的轨道可能穿过圆 $|z| = r_0$ 数次后, 才趋于无穷, 或最终被稳定区所俘获。

对 $\alpha > 1$ 和 $\beta < -1, \alpha < -1$ 和 $\beta > 1, \alpha < -1$ 和 $\beta < -1$ 时的情况, 可模仿上述分析, 得出结论, 故不再赘述。

3.2 α, β 为小数

图 2 为小数阶广义 M 和 J 组合集的等势带图。其中图 2a

$\sim 2d$ 为广义 J-M 组合集, 图 2e \sim 2h 为广义 M-J 组合集。对小数阶广义 M 和 J 组合集的结构特征可作如下分析: 由开关映射式(1)构造广义 M 和 J 组合集, 对式(1)中的 z^a 和 z^b 的计算, 采用了 DeMoivre 理论

$$\begin{cases} z^a = r_f^a (\cos a\theta_f + i \sin a\theta_f) \\ z^b = r_g^b (\cos b\theta_g + i \sin b\theta_g) \end{cases} \quad (7)$$

这就涉及到相角 θ_f 和 θ_g 主值范围的选取, 作者选取 θ_f 和 θ_g 的范围为以下四种情况: $[0, 2\pi), [-\pi, \pi), [-3\pi/2, \pi/2)$ 和 $[-\pi/2, 3\pi/2)$ 。当 α, β 为整数时, 将不会影响式(7)的使用, 因

$$\begin{cases} \cos(a\theta_f) = \cos(a\theta_f + 2\pi\alpha) \\ \sin(a\theta_f) = \sin(a\theta_f + 2\pi\alpha) \\ \cos(b\theta_g) = \cos(b\theta_g + 2\pi\beta) \\ \sin(b\theta_g) = \sin(b\theta_g + 2\pi\beta) \end{cases} \quad (8)$$

但 α, β 为小数时, 则式(8)不成立, 故 θ_f 和 θ_g 范围的不同选取将导致广义 M 和 J 组合集的不同演化。另外在使用式(7)时, 若 $a\theta_f$ 和 $b\theta_g$ 超出上述四种主值范围, 就要使 $a\theta_f$ 和 $b\theta_g$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整, 这就导致广义 M 和 J 组合集出现了错动和断裂。可见广义 M 和 J 组合集错动和断裂的出现仅当 α, β 取小数时。又由于相角 θ_f 和 θ_g 的选取在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处的不连续性, 导致了广义 M 和 J 组合集的错动和断裂仅出现在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处。当相角 θ_f 和 θ_g 主值范围选取为上述四种情况时, 由有重复排列理论可知 θ_f 和 θ_g 主值范围的选取有 $4^2 = 16$ 种组合形式。故当 α, β 在两个相邻整数间连续变化时, 广义 J-M 组合集和广义 M-J 组合集的演化形式各有 16 种(因篇幅所限, 本文只各给出四种)。

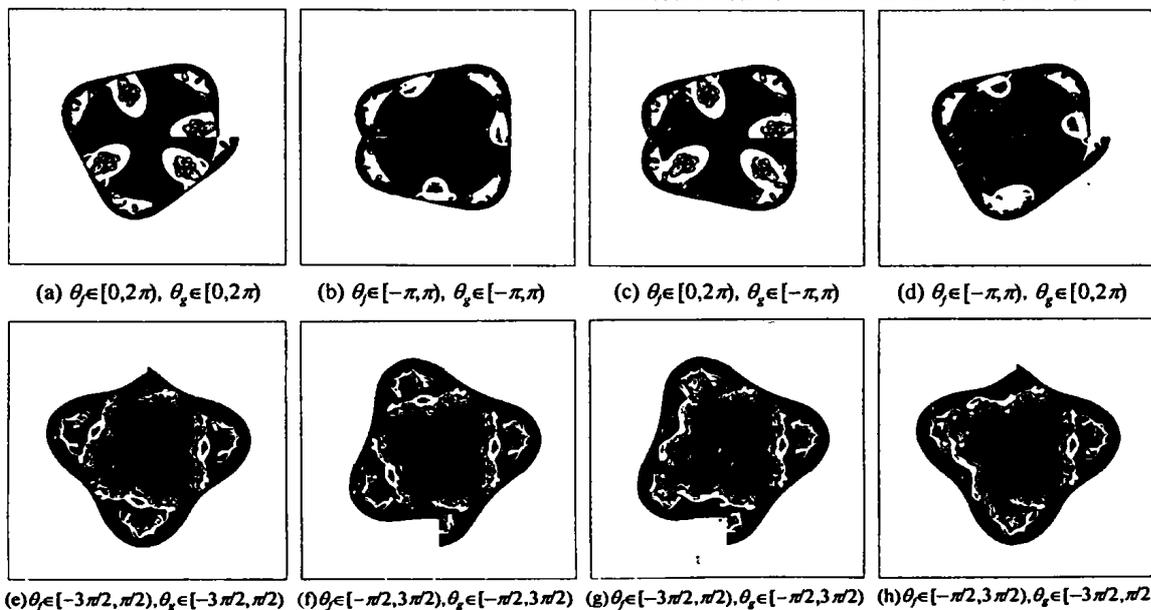


图 2 小数阶广义 M 和 J 组合集

图 2a \sim 2d 的参数为: $\alpha = 3.5, c_f = -1.2 - i0.8, \beta = 4.5, r_0 = 1.0$; 图 2e \sim 2h 的参数为: $\alpha = 4.5, \beta = 3.5, c_g = -1.2 - i0.8, r_0 = 1.0$ 。

结论 (1) 基于本文首次提出的开关映射, 阐述了广义 M 和 J 组合集的构造方法, 并给出了一系列广义 M 和 J 组合集。通过对在开关映射作用下复 Z 平面上初始点轨道的分析, 给出了广义 M 和 J 组合集的结构特征; 通过对广义 M 和 J 组合集构造算法的研究, 得出其演化过程依赖于相角主值范围的选取。

(2) 开关过程不同于独立过程, 在日常生产和科研当中经

常容易碰到, 如在控制系统中的开关控制过程等。本文的工作可能会对其它领域的研究有所帮助, 如当 z_0 点轨道在圆 $|z| = r_0$ 内外跳跃时, 映射 f 与 g 将相互替换, 这可能对人口学家研究人口变化规律有所启迪。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature. San Fransisco: Freeman W H, 1982. 1~10
- 2 Peitgen H O, Saupe D. The science of fractal images. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 137~218

(下转第 133 页)

将口型分成八种基本口型。现在选择八种基本口型中的几幅

图像作为示例。如图4所示。



图4 基本口型分类结果之例

通过分析发现,导致产生某些口型误分类的原因,主要有两个方面。第一是因为原始图像嘴角定位不准确,误分类的图像的嘴角常常处于阴影之中,使其颜色与正常唇色有很大差异,而被排除在唇色之外;第二是因为在某些口型中,唇色与露出来的舌头的颜色相近,因此导致口型定位不准确,致使参数并不能描述它所代表的口型,从而导致误分类情况。

本文给出了中文单韵母口型分类的具体结果,产生了衡量中文单韵母发音过程中各幅图像所处状态的明确的准则,减小了发生状态转移时的不确定性,为在唇读识别中序列图像的状态转移提供了一个较为清晰的配准。

5 识别结果和结论

实验中共采集了10个人分别发汉语拼音 a.o.e.i.u 的序列口型图像,采集的图像为24位真彩色图像,采集速度每秒25帧,其中每人每个音发5组,共得到250组序列图像。对图像序列进行时间归正,然后用前面介绍的方法进行了唇检测与分类,并用 SCHMM 模型训练和识别。

表2 识别结果

特定人	非特定人
95.8%	92.4%

实验证明,口型分类对唇读识别确实有着极其重要的意义,它为连续语音识别各个状态的确定提供了明确的依据。把基本口型作为唇读识别的基元用于连续语句的识别是一种新的行之有效的方法。虽然其识别率还不算很高,但那是由于口型序列到语音序列的映射不是唯一的,如果我们的语言模型能够再复杂一些,我们的序列对应关系会找得更好,即识别率会更高。这正是下一步我们要做的工作。

参考文献

- 1 Stork D G, Wolff G J, Levine E P. Neural Network Lipreading System for Improved Speech Recognition. In: Proc. Intl. Joint Conf. on Neural Networks, 1992, 2: 289~295
- 2 Hennecke M E, Stork D G, Prasad K V. Visionary Speech: Looking ahead to Practical Speechreading Systems. In: David G. Stork and Marcus E. Hennecke, eds. Speechreading by Humans and Machines, Springer and Systems Sciences, 1996. 331~350
- 3 Gao W, Liu M B. A Hierarchical Approach to Human Face Detection in Complex Background. the First International Conference on Multimodal Interface, Beijing, 1996
- 4 姚鸿勋, 高文, 李静梅, 吕雅娟, 等. 用于口型识别的实时唇定位方法. 软件学报, 2000, 11(8): 1126~1132
- 5 姚鸿勋, 刘明宝, 高文, 等. 基于彩色图像的色系坐标变换的面部定位与跟踪法. 计算机学报, 2000, 23(2): 158~165
- 7 王兴元, 朱伟勇. 正实数阶广义J集的嵌套拓扑分布定理. 东北大学学报(自然科学版), 1999, 20(5): 489~492
- 8 Wang Xingyuan, Liu Xiangdong, Zhu Weiyong, Gu Shusheng. Analysis of c-plane fractal images from $Z \leftarrow Z^{\alpha} + c$ for $\alpha < 0$ Fractals, 2000, 8(3)
- 9 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ ($\alpha < 0$) 所构造的广义M-集的研究. 数学物理学报, 1999, 19(1): 73~79
- 10 Falconer K J. 分形几何——数学基础及其应用. 曾文曲, 刘世耀译. 沈阳: 东北大学出版社, 1991. 238~245
- 11 Blanchard P. Complex analytic dynamics on the riemann sphere. Bulletin of the american mathematical society, 1984, 11: 88~144

(上接第145页)

- 3 Lakhtakia A, Varadan V V, Messier R, Varadan V K. On the symmetries of the Julia sets for the process $Z \leftarrow Z^{\alpha} + c$. J Phys A: Math Gen., 1987, 20: 3533~3535
- 4 Gujar U G, Bhavsar V C. Fractals from $Z \leftarrow Z^{\alpha} + c$ in the Complex c-plane. Computers & Graphics, 1991, 15(3): 441~449
- 5 Gujar U G, Bhavsar V C, Vangala N. Fractals images from $Z \leftarrow Z^{\alpha} + c$ in the Complex z-plane. Computers & Graphics, 1992, 16(1): 45~49
- 6 Dhurandhar S V, Bhavsar V C, Gujar U G. Analysis of z-plane fractals images from $Z \leftarrow Z^{\alpha} + c$ for $\alpha < 0$. Computers & Graphics, 1993, 17(1): 89~94