

利用类 Delaunay 三角剖分实现 Voronoi 图

Implementation of Voronoi Diagram by Ressemble Delaunay Triangulation

任永功 廖士中

(辽宁师范大学计算机与信息技术学院 大连116029)

Abstract Voronoi diagram is one of the most important branches in computational geometry and finds applications in various fields. In the paper, the method, which is proposed, is new and efficient. It verifies pixels one by one, finds Voronoi vertices, connects Voronoi vertices, forms Voronoi diagrams. The method of thinking is clear-cut, algorithmically simple, implements easily, and the data structure of Voronoi diagrams are easily described. Finally the source program is written in Visual C++.

Keywords Computational geometry, Voronoi diagram, Triangulation, Dual graphs Correspondence

1 引言

计算几何在计算机辅助设计、计算机图形学(特别是三维图形生成技术)及机器人等领域是非常重要的。特别在近年来,受到了学术界的极大关注。Voronoi 图是计算几何的一个重要分支。在气象、生态、空中交通管制、城市规划等领域都得到广泛应用。

至今已发展了大量的实现 Voronoi 图的方法,发表了很多文章,基本上是基于连续域计算几何出发进行的,其计算方法主要分成两个类型:一个是增量算法,通过每次增加一个点来计算 Voronoi 图;另一种是分合算法,通过将点划分成两部分,递归计算每一部分点的 Voronoi 图,然后再将它们合并。这两类算法理论效率高,但相关数据量和占用内存量都比较大,Voronoi 图数据结构不易描述。而此文给出的算法思路清晰,算法简单,容易实现,Voronoi 图数据结构容易描述。

2 Voronoi 图和 Delaunay 三角剖分定义及性质

2.1 Voronoi 图

给定点集 $\{P_i\}, i=1, \dots, N$, 存在多面体集合 $\{V_j\}, j=1, \dots, N$, 与之对应, 其中每一个多面体 $\{V_j\}$ 含且仅含 $\{P_i\}$ 中的一个点 P_i , V_j 中的每一点到 P_i 的距离小于该点到 $\{P_i\}$ 中除 P_i 外其它任一点距离, 即

$$V_j = \{P; |P - P_j| < |P - P_i|, \forall i \neq j\}$$

集合 $\{V_i\}$ 覆盖点集 $\{P_i\}$ 确定的域, 且 V_i 互不重叠, 称之为点集 $\{P_i\}$ 的 Voronoi 图。如图1粗线所示, 其中的结点称为 Voronoi 顶点, 边称为 Voronoi 边。

2.2 对偶

给定一个凸多面体图形 G , 定义它的对偶图形 G_d 如下:

1. G_d 的每一个顶点和 G 的一个多面体相关连;
2. G_d 的每一条边和 G 的一个面相关;
3. 如果一个面分开 G 的二个多面体 V_i 和 V_j , 则和这个面相关连的对偶边连接和 V_i, V_j 相关连的 G_d 的二个顶点。

2.3 Delaunay 三角剖分

点集 $\{P_i\}$ 的 Delaunay 三角剖分定义为该点集的 Voronoi 图的对偶。如图1所示, 其中细线表示的即为 Delaunay 三角剖分。

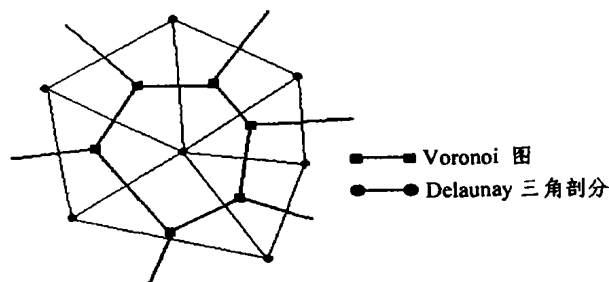


图1

Delaunay 三角剖分具有一些很好的特性:

性质1 无四点共圆点集的 Voronoi 图的对偶图是该点集的一个三角剖分, 即 Delaunay 三角剖分; 有四点共圆时, 对偶图称为准 Delaunay 三角剖分。

性质2 假设给定点集 $\{P_i\}, i=1, \dots, N$ 的 Voronoi 图 Delaunay 三角剖分记为三角形集合 $\{D_i\}, i=1, \dots, N$, 则每一个 D_i 与 $\{V_i\}$ 的一个顶点相对应, D_i 的每一条边与 $\{V_i\}$ 的一条边相对应。

先假设无四点共圆, 那么根据性质1, 与 Voronoi 图就有一个 Delaunay 三角剖分对偶图。在 Delaunay 三角剖分对偶图中, 根据性质2, 每一个 D_i 与 $\{V_i\}$ 的一个顶点相对应, (因为 D_i 是三个生成子构成的一个三角形, 所以也就是三个生成子对应一个顶点, 简称三生成子——顶点对)。如果有一个顶点对应多个 D_i , 则是共圆情况。

3 类 Delaunay 三角剖分实现 Voronoi 图算法

3.1 基本思想

从理论上讲, 二维欧氏空间(平面)是由无穷多个点构成, 逐个验证每一个像素, 找出 Voronoi 图顶点, 利用类 Delaunay 三角剖分实现 Voronoi 图。首先, 画出 N 个生成子 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$, 计算屏幕区域内每个像素 $P(i, j)$ 到每个生成子 P_i 的距离。找最小值 m_1 , 次最小值 m_2 , 再次最小值 m_3 及相应的 P_1, P_2, P_3 , 若 m_1 和 m_2, m_2 和 m_3 之差的绝对值小于一个很小正数, 则 $P(i, j)$ 是一个顶点集 $S(i)$ 中一点, 否则不是。反复做, 直到区域内所有像素验证完为止。同时, 凝聚每个顶点集,

任永功 在读硕士, 主要研究方向为图像处理、计算机视觉。廖士中 博士, 教授, 主要研究方向为空间推理、定性推理和视频内容检索。

得到一点作为一个顶点,把此顶点和与之匹配的三个生成子一起保存,最后实现 Voronoi 图。

3.2 算法具体步骤

1. [验证屏幕区域内每个像素到每个生成子 P_i 的距离]

循环反复执行下列语句,直到超出区域宽

循环反复执行下列语句,直到超出区域高

①初始化 m_1, m_2, m_3 为一个最大值 MAX

②循环反复执行下列语句,直到超出生成子个数

1) 计算生成子 P_i 到像素 $P(i, j)$ 距离

1) 找到 m_1, m_2, m_3 及记录相应的 P_1, P_2, P_3

③如果 m_1, m_2, m_3 之间差距小于某一个最小值 MIN1, 则是一个 D_i 面(即一个三生成子——顶点对), 记录到一个二维数组 $P-P_1-P_2-P_3$ 中

④顶点数加1

⑤把 m_1, m_2, m_3 恢复到最大值 MAX, 再找下一个 D_i 面。

2. [处理共圆问题]

循环反复执行下列语句,直到超出顶点个数

如果某两个 D_i 面中, 顶点与顶点距离小于某一个最小值 MIN2, 则认为是同一点, 用中值平均法把顶点集凝聚为一点。

3. [利用 D_i 的边与 V_i 的边对应原理, 画出 Voronoi 图]

循环反复执行下列语句,直到超出 D_i 面数

如果是相邻的两个 D_i 面, 则必有一条 Voronoi 边, 画出 Voronoi 图。实验结果如图2。

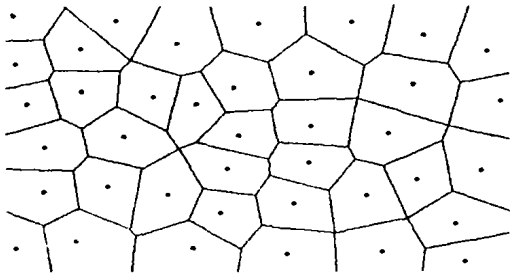


图2

3.3 算法说明

1) 在找到 D_i 面时, 有可能出现同样 D_i 与多个顶点对应。这样就形成顶点集 $S(i)$, 对每一个 $S(i)$ 进行凝聚, 最后形成一个顶点。原则是: 始终保持 m_1, m_2, m_3 平均值最小。

2) MIN1, MIN2 取值要适中。如果 MIN1 取值过大, 则顶点过多, 处理效率低; 过小, 则找不到顶点。MIN2 取值过大, 则 Voronoi 图失真度大; 过小, 则不能有效处理共圆问题。本算法 MIN1 取 1.2, MIN2 取 7.8 (像素间距离)。

结论 传统 Voronoi 图画法尽管在理论上效率较高, 但是在计算机上实现起来都存在数据结构复杂, 内存开销大, 程序编写困难。与此相比, 此算法有以下特点:

1) 很容易实现 Voronoi 图的数据结构, 例: 双重链边表 (Double Conned Edge List)、翼边数据结构 (Wingle Edge Data Structure)。

2) 占用内存少, 只需存入 D_i 面和一些临时变量。

3) 使用简便, 只需输入生成子坐标。即可自动画出生成子 Voronoi 图。

4) 算法理论上时间复杂度为 $O(n^2)$, 但画 Voronoi 图在有限区域画, 所以可以认为常数级。

5) 程序实现简洁、明快、可读性好。

参考文献

- 1 Preparata F P, Shamos M I. 计算几何导论. 北京: 庄心谷译, 北京科学出版社, 1990
- 2 Takao OHYA, Masao IRI and Kazuo MUROTA. A fast Voronoi diagram algorithm with quaternary tree bucketing. Information Processing Letter, 1984, (18): 227-231
- 3 张有会等. Voronoi 图画法的改进与实现. 计算机科学, 1999, (11): 85-87
- 4 王华, 叶爱亮, 等. Visual C++ 6.0 编程实例与技巧. 北京: 机械工业出版社, 1999. 4

(上接第93页)

- 3 Blake S, et al. An Architecture for Differentiated Services. RFC2475, Dec. 1998
- 4 Chaskar H. Requirements of a QoS Solution for Mobile IP. draft-ietf-mobileip-qos-requirements-01.txt, Aug. 2001
- 5 Talukdar A, Badrinath B, Acharya A. MRSVP: A Resource Reservation Protocol for an Integrated Services Packet Network with Mobile Hosts. [Technical report DCS-TR-337]. Rutgers University, 1997
- 6 Ben-Othman, Providing quality of service in mobile environments with MIR (Mobile IP Reservation Protocol). In: Proc. of IEEE Intl. Conf. on Networks, 2000. 24-29
- 7 Dommety G. Fast Handovers for Mobile IPv6. draft-ietf-mobileip-fast-mip6-02.txt, July 2001
- 8 Fankhauser G, et al. RSVP Support for Mobile IP Version 6 in Wireless Environments. draft-fhns-rsvp-support-in-mip6-00.txt, Nov. 1998

- 9 Chen J-C, McAuley A, et al. QoS architecture based on Differentiated Services for next generation wireless IP networks. draft-ietf-sumo-wireless-diffserv-00.txt, July 2000
- 10 Rexhepi V, Karagiannis G, Heijenk G. A Framework for QoS & Mobility in the Internet Next Generation. In: Proc. EUNICE 2000, Sep. 2000. 13-15
- 11 Hsu Y, Tsai T, Lin Y. QoS Routing in Multihop Packet Radio Environment. Third Symposium on Computers and Communications (ISCC), 1998
- 12 Niculescu D, Ganguly S, Vickers B. Dynamic QoS provisioning in wireless data networks. IEEE Vehicular Technology Conference, 2001
- 13 Choi S. QoS Guarantees in Wireless/Mobile Networks. [Ph. D dissertation of University of Michigan]. 1999