维普资讯 http://www.cqvip.com

计算机科学 2002Vol. 29№. 9

强核连续时延神经网络模型分岔的频域分析

Frequency Domain Analysis for Bifurcation of Neuron Network Model with Distributed Delays and Strong Kernel

李绍文

(西南财经大学经济数学系　成都 610074)

Abstract In this paper, a general two-neuron model with distributed delays and a strong kernel is investigated. By using the mean delay as a bifurcation parameter, we find that Hopf bifurcation occurs for the strong kernel. This means that a family of periodic solutions bifurcates from the equilibrium when the bifurcation parameter exceeds a critical value. Some numerical simulations are given to justify the theoretical analysis results.

Keywords Neuron, Distributed delays, Hopf bifurcation, Periodic solution, Nyquist criterion

1. 引言

神经网络是一个复杂的大规模非线性动力学系统。为了研究所产生的动力学现象,通常需对其简化,建立模型。对简化模型进行研究,并推广到大规模系统。

如文[7]提出了离散和连续时延的一个神经元模型:

$$\frac{dx(t)}{dt}=-x(t)+a\tanh[x(t)-bx(t-\tau)-c] \tag{1}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=-x(t)+a\tanh[x(t)-b\int_0^\infty F(s)x(t-s)ds-c] \tag{2}$$

这里 a 指出了连续变量 $x(\cdot)$ 的变化范围,b 作为历史影响的度量,c 是补偿常数,τ 是时延,$F(\cdot)$ 是核函数。这是一个带有局部正反馈和时延的模型。在双曲正切函数自变量中的 $x(t)$ 是神经网络模型中局部正反馈的自激。利用 Lyapunov 函数,文[7]中给出了方程(1)和(2)存在全局稳定平衡点的充分必要条件。文[9]和文[10]进一步讨论了方程(2)分别在弱核和强核情形下的稳定性问题。文[12]研究了方程(1)的 Hopf 分岔和混沌现象。

又如文[5]考虑了由兴奋和抑制因子组成的双神经元网络:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=-x(t)+a\tanh[c_1y(t-\tau)]\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=-y(t)+a\tanh[-c_2x(t-\tau)]\end{cases} \tag{3}$$

这里 a、c_1、c_2 和 τ 都是正实数,y 表示 x 的激活位势,x 是抑制位势。文[5]表明如果时延足够大,这个网络将出现周期解,并分析了 hopf 分岔。

最近,文[11]研究了如下的连续时延的双神经元系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1^*(t)}{dt}=-x_1^*(t)+a_1^*f[x_2^*(t)-b_2\int_0^\infty F(r)x_2^*(t-r)dr-c_1]\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_2^*(t)+a_2^*f[x_1^*(t)-b_1\int_0^\infty F(r)x_1^*(t-r)dr-c_2]\end{cases} \tag{4}$$

这里 a_i^*、b_i 和 $c_i(i=1,2)$ 是非负实数。在这个模型中,$x_i^*(i=1,2)$ 表示神经元的激活水平,a_i^* 对应于变量 x_i^* 的连续变化范围,b_i 反映过去结果对当前动态影响的大小,c_i 表示神经元的阈值。在函数 f 自变量中的项 x_i^* 表示一个局部反馈。权函数 $F(r)$ 是定义在[0, $+\infty$]上的一个非负的有界函数,它描述过去结果对当前动态的影响。

文[11]利用 Roth-Hurwitz 准则研究了模型(4)式在弱核情形下的线性稳定性和 Hopf 分岔。本文将在强核情形下研究模型(4)式。

需要指出的是,前面所提及的工作是在时延微分方程的状态空间中讨论的,通常称为"时域"方法。最近,提出了一种新的方法,应用反馈系统的理论,在状态空间中作拉普拉斯变换,即由陈关荣教授等提出的"频域"方法。频域方法相比经典的时域方法具有一定优势,简化了复杂的数学计算和分析。模型(4)式在强核情形下,用时域方法讨论 Hopf 分岔极其困难,本文用频域方法很好地解决了这个问题。

2. Hopf 分岔的存在性

考虑模型(4)式的强核情形:

$$F(r)=\mu^2re^{-\mu r},\mu>0 \tag{5}$$

为了方便起见,我们设模型(4)式中 $c_1=c_2=0$。令

$$\begin{cases}x_1(t)=x_1^*(t)-b_1\int_0^\infty F(r)x_1^*(t-r)dr\\ x_2(t)=x_2^*(t)-b_2\int_0^\infty F(r)x_2^*(t-r)dr\end{cases}$$

这样,系统(4)等价于下面的模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-x_1(t)+a_1^*f[x_2(t)]-a_1^*b_1\int_{-\infty}^0F(-r)f[x_2(t+r)]dr\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_2(t)+a_2^*f[x_1(t)]-a_2^*b_2\int_{-\infty}^0F(-r)f[x_1(t+r)]dr\end{cases} \tag{6}$$

假设

$$f\in C^1(R),f(0)=0,\text{且 }u\neq0\text{ 时},uf(u)>0 \tag{7}$$

当 $a_1^*a_2^*|(1-b_1)(1-b_2)|<1/[f'(0)]^2$ 时,系统(4)式存在唯一的平衡点(0, 0)。

取 $F(r)=\mu^2re^{-\mu r}$,方程(6)两边关于时间 t 求二阶导数,并设 $x_3(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$,$x_4(t)=\dfrac{dx_2(t)}{dt}$,$x_5(t)=\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}$,和 $x_6(t)=\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}$,可得一个 6 维微分方程系统:

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_3 \qquad \dfrac{dx_2}{dt}=x_4\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_5 \qquad \dfrac{dx_4}{dt}=x_6\\ \dfrac{dx_5}{dt}=-\mu^2x_1-(\mu^2+2\mu)x_3-(2\mu+1)x_5+a_1^*f''(x_2)x_4^2\\ \quad +a_1^*(1-b_1)\mu^2f(x_2)+2a_1^*\mu f'(x_2)x_4+a_1^*f'(x_2)x_6\\ \dfrac{dx_6}{dt}=-\mu^2x_2-(\mu^2+2\mu)x_4-(2\mu+1)x_6+a_2^*f''(x_1)x_3^2\\ \quad +a_2^*(1-b_2)\mu^2f(x_1)+2a_2^*\mu f'(x_1)x_3+a_2^*f'(x_1)x_5\end{cases}\tag{8}$$

将非线性系统(8)式改写为矩阵形式：

$$\frac{dx}{dt}=A(\mu)x+H(x)\tag{9}$$

这里 $x=(x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5\quad x_6)^T$

$$A(\mu)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-\mu^2&0\\0&0&0&0&0&-\mu^2\\1&0&0&0&-(\mu^2+2\mu)&0\\0&1&0&0&0&-(\mu^2+2\mu)\\0&0&1&0&-(2\mu+1)&0\\0&0&0&1&0&-(2\mu+1)\end{pmatrix}^T$$

$$H(x)=(0\ 0\ 0\ 0\ h_1(x)\ h_2(x))^T\tag{10}$$

其中 $h_1(x)=a_1^*(1-b_1)\mu^2f(x_2)+2a_1^*\mu f'(x_2)x_4+a_1^*f'(x_2)x_6+a_1^*f''(x_2)x_4^2$

$h_2(x)=a_2^*(1-b_2)\mu^2f(x_1)+2a_2^*\mu f'(x_1)x_3+a_2^*f'(x_1)x_5+a_2^*f''(x_1)x_3^2$

我们将平均时延 μ 作为分岔参数，得到一个带非线性反馈的线性系统：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(\mu)x+Bu\\ y=-Cx\\ u=g(y;\mu)\end{cases}\tag{11}$$

其中 $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$C=I$，$u=g(y;\mu)=\begin{pmatrix}h_1(-y)\\h_2(-y)\end{pmatrix}$ (12)

再对系统(9)作拉普拉斯变换，得该系统线性部分的传输矩阵：

$$G(s;\mu)=C[sI-A(\mu)]^{-1}B=\frac{1}{(s+\mu)^2(s+1)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\s&0\\0&s\\s^2&0\\0&s^2\end{pmatrix}\tag{13}$$

我们将反馈系统在平衡点 $y=0$ 处线性化，得到相应的雅可比矩阵：

$$J(\mu)=\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{y=0}=\begin{pmatrix}0&-a_2(1-b_2)\mu^2\\-a_1(1-b_1)\mu^2&0\\0&-2a_2\mu\\-2a_2\mu&0\\0&-a_2\\-a_1&0\end{pmatrix}^T\tag{14}$$

这里 $a_i=a_i^*f'(0)$，$i=1,2$。设：

$$h(\lambda,s;\mu)=det|\lambda I-G(s;\mu)J(\mu)|$$
$$=\lambda^4\left[\lambda^2-\frac{k_1(s;\mu)k_2(s;\mu)}{(s+\mu)^4(s+1)^2}\right]=0\tag{15}$$

其中 $k_1(s;\mu)=a_1[(1-b_1)\mu^2+s^2+2\mu s]$

$k_2(s;\mu)=a_2[(1-b_2)\mu^2+s^2+2\mu s]$

根据 Hopf 分岔理论知：如果系统在 $\mu=\mu_0$ 处出现 Hopf 分岔，则其在时域中的雅可比矩阵有一对纯虚的特征值 $\pm i\omega_0$。

下面我们应用耐奎斯特稳定性准则，设 $s=i\omega$，有下面的引理：

引理 1 如果非线性系统在时域中相应的雅可比矩阵有一对纯虚的特征值 $\pm i\omega_0$，则在频域中的常数矩阵 $[G(i\omega_0;\mu_0)J(\mu_0)]$ 有实特征值 $-1+i_0$。

设 $\hat\lambda=\hat\lambda(i\omega;\mu)$ 是矩阵 $[G(i\omega;\mu)J(\mu)]$ 的特征值，并满足 $\hat\lambda(i\omega_0;\mu_0)=-1+i0$。那么

$$h(-1,i\omega_0;\mu_0)=1-\frac{k_1(i\omega_0;\mu_0)k_2(i\omega_0;\mu_0)}{(\mu_0+i\omega_0)^4(1+i\omega_0)^2}=0\tag{16}$$

首先考虑 $b_2=0$ 的情形。方程(16)化为

$$a_1a_2[(1-b_1)\mu_0^2-\omega_0^2+2i\mu_0\omega_0]=(\mu_0+i\omega_0)^2(1+i\omega_0)^2\tag{17}$$

即：

$$a_1a_2[(1-b_1)\mu_0^2-\omega_0^2]=(\mu_0^2-\omega_0^2)(1-\omega_0^2)-4\mu_0\omega_0^2\tag{18}$$

$$a_1a_2\mu_0=\mu_0^2-\omega_0^2+\mu_0(1-\omega_0^2)\tag{19}$$

可得：

$$(1+\mu_0)^4-a_1a_2b_1(1+\mu_0)^3-a_1a_2(2-b_1)(1+\mu_0)^2+(a_1a_2)^2=0\tag{20}$$

$$\omega_0^2=\mu_0\left(1-\frac{a_1a_2}{1+\mu_0}\right)\tag{21}$$

定理 1 (Hopf 分岔存在性定理) 如果 $b_2=0$，则系统(4)式的 Hopf 分岔点 μ_0 必为方程(20)的根，并且应满足 $\mu_0>a_1a_2-1$。

下面再考虑 $b_2\neq0$ 的情形，方程(16)变成

$$a_1a_2[(1-b_1)\mu_0^2-\omega_0^2+2i\mu_0\omega_0][(1-b_2)\mu_0^2-\omega_0^2+2i\mu_0\omega_0]=(\mu_0+i\omega_0)^4(1+i\omega_0)^2\tag{22}$$

即

$$a_1a_2\{[1-b_1)\mu_0^2-\omega_0^2][(1-b_2)\mu_0^2]-4\mu_0^2\omega_0^2\}=[(\mu_0^2-\omega_0^2)^2-4\mu_0^2\omega_0^2](1-\omega_0^2)-8\mu_0\omega_0^2(\mu_0^2-\omega_0^2)\tag{23}$$

$$a_1a_2\mu_0[(2-b_1-b_2)\mu_0^2-2\omega_0^2]=(\mu_0^2-\omega_0^2)^2-4\mu_0^2\omega_0^2+2\mu_0(\mu_0^2-\omega_0^2)(1-\omega_0^2)\tag{24}$$

可得

$$16(\mu_0+1)^8+c_7(\mu_0+1)^7+c_6(\mu_0+1)^6+c_5(\mu_0+1)^5+c_4(\mu_0+1)^4+c_3(\mu_0+1)^3+c_2(\mu_0+1)^2+c_1(\mu_0+1)+c_0=0\tag{25}$$

$$\omega_0^2=\mu_0^2\frac{d_1(\mu_0)}{d_2(\mu_0)}\tag{26}$$

其中 $c_7=16a_1a_2(2b_1b_2-b_1-b_2)$，

$c_6=4a_1a_2[-13b_1b_2+6(b_1+b_2)-16]$

$c_5=4(a_1a_2)^2[-2(b_1b_2)^2-7b_1b_2(b_1+b_2)+8b_1b_2-2(b_1+b_2)^2+8(b_1+b_2)]+32a_1a_2b_1b_2$

$c_4=(a_1a_2)^2[28(b_1b_2)^2+62b_1b_2(b_1+b_2)-156b_1b_2+9(b_1+b_2)^2-56(b_1+b_2)+96]-8a_1a_2b_1b_2$

$c_3=(a_1a_2)^3(b_1+b_2)[4b_1b_2-(b_1+b_2)^2+8(b_1+b_2)-16]+(a_1a_2)^2b_1b_2[-38b_1b_2-44(b_1+b_2)+160]$

$c_2=(a_1a_2)^3[-2b_1b_2(b_1+b_2)+20b_1b_2+(b_1+b_2)^3-10(b_1+b_2)^2+40(b_1+b_2)-64]+(a_1a_2)^2b_1b_2[25b_1b_2+10(b_1+b_2)-48]$

$c_1=-4(a_1a_2)^3b_1b_2(b_1+b_2)-8(a_1a_2b_1b_2)^2$

$c_0=(a_1a_2)^4[-4b_1b_2+(b_1+b_2)^2-8(b_1+b_2)+16]+2(a_1a_2)^3b_1b_2[(b_1+b_2)-4]+(a_1a_2b_1b_2)^2$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$d_1(\mu_0)=(a_1a_2)^2(2-b_1-b_2)+a_1a_2b_1b_2\mu_0(2\mu_0+1)^2$$
$$+a_1a_2(b_1+b_2)(6\mu_0^3+12\mu_0^2+7\mu_0+1)$$
$$-a_1a_2(16\mu_0^3+28\mu_0^2+16\mu_0+4)$$
$$+(10\mu_0^4+32\mu_0^3+36\mu_0^2+16\mu_0+2)$$
$$d_2(\mu_0)=2(a_1a_2)^2-a_1a_2(b_1+b_2)(2\mu_0^3+3\mu_0^2+\mu_0)$$
$$-a_1a_2(12\mu_0^2+16\mu_0+4)$$
$$+(16\mu_0^5+58\mu_0^4+80\mu_0^3+52\mu_0^2+16\mu_0+2) \quad (27)$$

定理 2(Hopf 分岔存在性定理) 系统(4)式的 Hopf 分岔点 μ_0 必为方程(25)的根，并且应满足 $\frac{d_1(\mu_0)}{d_2(\mu_0)}>0$。

3. 数字模拟例子

在本节中，为了证实前面计算的正确性，我们完成了系统(4)式在弱核情形下对于 a_1，a_2，b_1 和 b_2 的一些不同取值的数值计算结果。

1. 设 $a_1=1.5$，$a_2=0.5$，$b_1=3$，$b_2=0$，得 $\mu_0=0.0502$ 或 $\mu_0=0.6894$。先取 $\mu_0=0.0502$。在图 1 中，取 $\mu=0.045$，不存在周期解；在图 2 中，取 $\mu=0.055$，存在一个稳定的周期解。于是，$\mu_0=0.0502$ 是一个上临界 Hopf 分岔点。

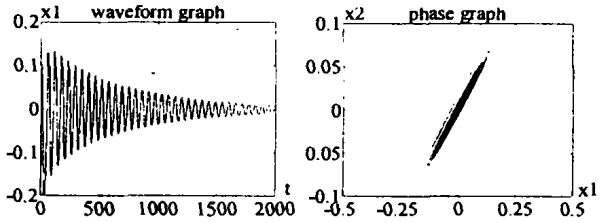

图 1 $a_1=1.5, a_2=0.5, b_1=3, b_2=0, \mu=0.045$，不存在周期解。

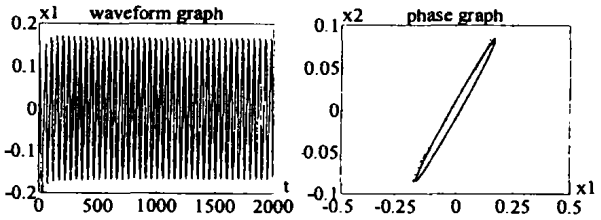

图 2 $a_1=1.5, a_2=0.5, b_1=3, b_2=0, \mu=0.055$，存在一个稳定的周期解。

取 $\mu_0=0.6894$，在图 3 中，取 $\mu=0.65$，存在一个稳定的周期解；在图 4 中，取 $\mu=0.75$，不存在周期解。于是，$\mu_0=0.6894$ 是一个下临界 Hopf 分岔点。

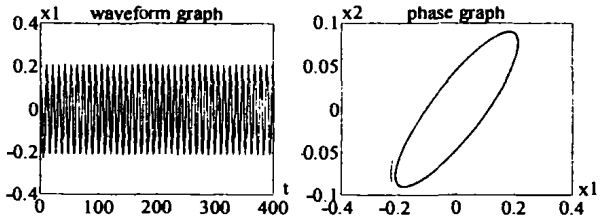

图 3 $a_1=1.5, a_2=0.5, b_1=3, b_2=0, \mu=0.65$，存在一个稳定的周期解。

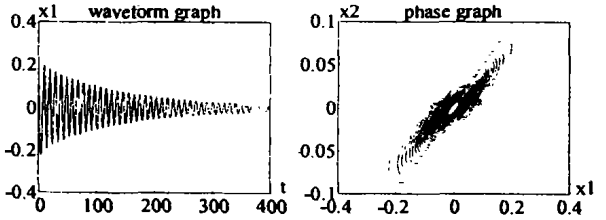

图 4 $a_1=1.5, a_2=0.5, b_1=3, b_2=0, \mu=0.75$，不存在周期解。

2. 设 $a_1=2$，$a_2=1.5$，$b_1=0.8$，$b_2=1.1$，得 $\mu_0=2.0521$。取 $\mu_0=2.0521$，在图 5，取 $\mu=2$，存在一个稳定的周期解；在图 6 中，取 $\mu=2.1$，不存在周期解。于是，$\mu_0=2.0521$ 是一个下临界 Hopf 分岔点。

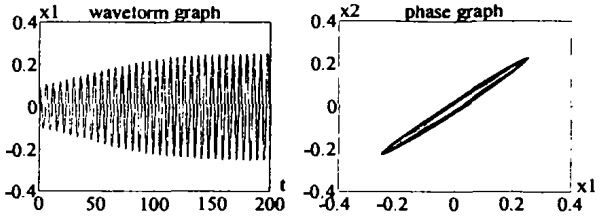

图 5 $a_1=2, a_2=1.5, b_1=0.8, b_2=1.1, \mu=2$，存在一个稳定的周期解。

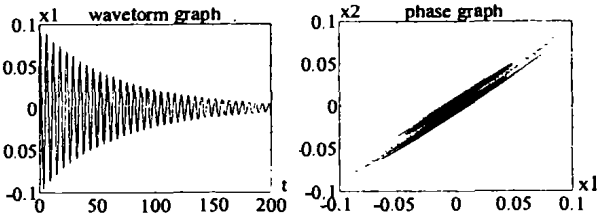

图 6 $a_1=2, a_2=1.5, b_1=0.8, b_2=1.1, \mu=2.1$，不存在周期解。

3. 设 $a_1=0.5$，$a_2=1.8$，$b_1=0.8$，$b_2=0.3$，得 $\mu_0=0.0188$ 或 $\mu_0=0.1468$。先取 $\mu_0=0.0188$。在图 7，取 $\mu=0.01$，不存在周期解；在图 8 中，取 $\mu=0.025$，存在一个稳定的周期解。于是，$\mu_0=0.0188$ 是一个上临界 Hopf 分岔点。

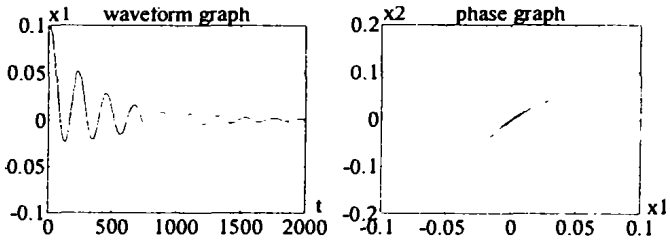

图 7 $a_1=0.5, a_2=1.8, b_1=0.8, b_2=0.3, \mu=0.01$，不存在周期解。

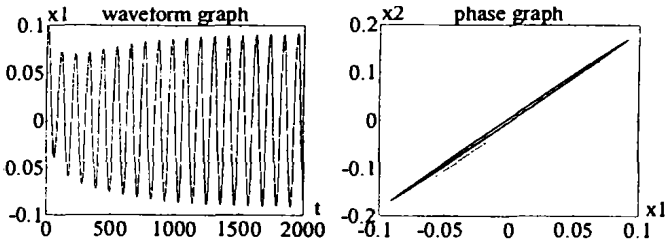

图 8 $a_1=0.5, a_2=1.8, b_1=0.8, b_2=0.3, \mu=0.025$，存在一个稳定的周期解。

取 $\mu_0=0.1468$，在图 9 中，取 $\mu=0.14$，存在一个稳定的周期解；在图 10 中，取 $\mu=0.17$，不存在周期解。于是，$\mu_0=0.1468$ 是一个下临界 Hopf 分岔点。

结论 本文用频域方法研究了强核连续时延双神经元模型。这种情形用通常的时域方法处理较为复杂。我们将平均时延作为分岔参数，显示了当参数通过某一临界值时发生了 Hopf 分岔。

我们还可以通过文[13]提供的方法，在分岔点附近画出振幅轨迹 L_1 和特征曲线 $\lambda(i\omega)$，而确定分岔方向和周期解的稳定性。这个问题我们将在另一篇文章加以阐述。

维普资讯 http://www.cqvip.com

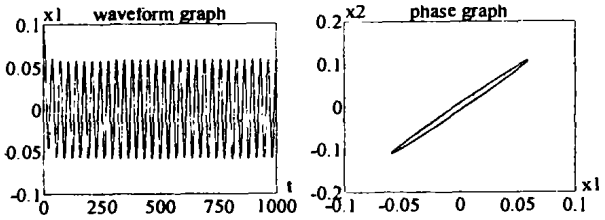

图 9 $a_1=0.5, a_2=1.8, b_1=0.8, b_2=0.3, \mu=0.14$，存在一个稳定的周期解。

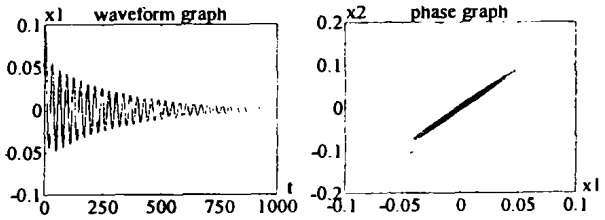

图 10 $a_1=0.5, a_2=1.8, b_1=0.8, b_2=0.3, \mu=0.17$，不存在周期解。

参 考 文 献

1 Hopfield J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. In: Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1984, 81: 3088～3092

2 Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural network with delay. Phys. Rev. 1989, A. 39: 347～359

3 Olien L, Belair J. Bifurcation, stability and monotonicity properties of a delayed neural model. Physica, 1997, D 102: 349～363

4 Belair J, Dufour S. Stability in a three-dimensional system of delay-differential equations. Can. Appl. Math. Quart., 1998, 4: 1878～1890

5 Gopalsamy K, Leung I. Delay-induced Periodicity in a neural network of excitation and inhibition. Physica, 1996, D 89: 395～426

6 Wei J, Ruan S. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays. Physica, 1999, D130: 255～272

7 Gopalsamy K, Leung I. Convergence under dynamical thresholds with delays. IEEE Trans. on NN, 1997, 8(2): 341～348

8 Gopalsamy K, Leung I, Liu P. Global Hopf-bifurcation in a neural netlet. Appl. Math. Comput., 1998, 94: 171～192

9 Liao X F, Wu Z F, Yu J B. Hopf bifurcation analysis of a neural system with a continuously distributed delay. In: Proc. of the Intl. Symposium on Signal Processing and Intelligent System, Guangzhou, China, 1999

10 Liao X F, Wu Z F, Yu J B. Stability switches and bifurcation analysis of a neural network with continuous delay. IEEE Trans. SMC A, 1999, 29(6): 692～696

11 Liao X F, Wong K W, Wu Z F. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays. Physica, 2001, D 149: 123～141

12 Liao X F, Wong K W, Leung C S, Wu Z F. Hopf bifurcation and chaos in a single delayed neuron equation with non-monotonic activation function. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12: 1535～1547

13 Moiola J L, Chen G. Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach. World Scientific, Singapore, 1996

14 Babcock K L, Westervelt R M. Dynamics of simple electronic neural networks with added inertia. Physica, 1986, D 23: 464～469

15 Babcock K L, Westervelt R M. Dynamics of simple electronic neural networks. Physica, 1987, D 28: 305～316

16 Destxhe A. Stability of periodic oscillation in a network of neurons with time delay. Phys. Lett., 1994, A 187: 309～316

（上接第 75 页）

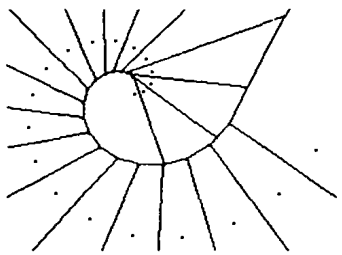

图 4 阿基米得螺线

表 1 算法效率的比较

生成子数量		2500	5000	7500	10000	12500	15000	17500	20000
基本增量算法	时间（秒）	6	15	28	42	61	79	101	126
	查找次数	83268	230486	421649	636747	891389	1143427	1495342	1826370
基于桶技术的增量算法	时间（秒）	1.3	4	6.5	10	14	19	23	28
	查找次数	4613	8364	13198	18518	24246	29896	29035	33457

表 1 列出了本文基于桶技术的增量算法与基本增量算法在执行时间和最近邻搜索次数的比较，这里 $\alpha=1$，生成子是随机生成的。实验环境为 Pentium 166/32M/1.2G，Windows 98/Visual C++5.0。图 8 是两种算法对每个生成子平均处理时间的比较。

结论 实验结果表明，本文给出的算法可处理平面上的任意点集，对三点共线、四点共圆等退化情形和误差的处理均简单有效。从表 1 可看出，采用桶技术对生成子排序后，最近邻搜索过程对每个生成子的平均查找次数不超过 2，即最近邻搜索过程大致可在常数时间内完成；而基本增量算法执行时，平均查找次数随生成子数目的增加而增加。在构造 Voronoi 图的时间上，两者也有明显的不同。基于桶技术的增量算法所用的时间明显小于基本增量算法所用的时间。图 8 清晰地表明，基于桶技术的增量算法在效率上有明显的改进，且每个生成子平均所用的 CPU 时间趋于常数，即本文给出的 Voronoi 图增量算法的平均时间复杂性基本上是线性的。

参 考 文 献

1 [美]F. P. 普雷帕拉塔, M. I. 沙莫斯. 计算几何导论[M]. 庄心谷译. 北京：科学出版社, 1990. 226～277

2 Ohya T, Iri M, Murota K. A Fast Vorovoi Diagram Algorithm with Quaternary Tree Bucketing[J]. Information Processing Letters, 1984, 18(4): 227～231

3 周培德. 计算几何－算法分析与设计[M]. 北京：清华大学出版社, 2000. 88～132