

连续时延神经网络模型的 Hopf 分岔分析

Hopf Bifurcation Analysis of Neural Network Model with Distributed Delays

李绍文

(西南财经大学经济数学系 成都 610074)

Abstract In this paper, a more general two-neuron model with distributed delays and weak kernel is investigated. By applying the frequency domain approach and analyzing the associated characteristic equation, the existence of bifurcation parameter point is determined. Furthermore, we found that if the mean delay is used as a bifurcation parameter, Hopf bifurcation occurs for the weak kernel. Some numerical simulations for justifying the theoretical analysis are also given.

Keywords Neuron, Distributed delays, Hopf bifurcation, Periodic solutions, Nyquist criterion

1. 引言

神经网络是一个非常复杂的非线性动力学系统。在神经网络模型中,有时必须考虑到其内在的时延。目前,时延神经网络模型的动力学现象是一个热门的研究课题。文[2]中研究了离散时延和对称相关矩阵神经网络的线性稳定性。文[4]通过构造 Lyapunov 函数,取得了一些离散时延神经网络稳定性的充分条件。文[8]将时延神经网络推广到离散时延区间动力系统,取得了这些系统的鲁棒性准则。

然而上面所提及的工作主要涉及到离散时延,而连续时延模型更切合实际,也更为精确。人体控制呼吸和心跳等有规律的运动是靠周期性的神经脉冲,因此,研究神经网络中的周期解具有现实意义。本文讨论弱核连续时延的双神经元模型,以平均时延作为分岔参数,研究连续时延的神经网络模型的 Hopf 分岔现象,也就是当分岔参数通过某一临界值时,一族周期解从平衡点处产生。

本文给出所研究的模型,用频域方法讨论 Hopf 分岔现象,并给出数值模拟例子,最后给出结论。

2. Hopf 分岔的存在性

在文[1]中研究了下面的神经网络模型:

$$\begin{cases} \frac{dx_1^*(t)}{dt} = -x_1^*(t) + a_1^* f[x_2^*(t) \\ \quad - b_2 \int_0^\infty F(r)x_2^*(t-r)dr - c_1] \\ \frac{dx_2^*(t)}{dt} = -x_2^*(t) + a_2^* f[x_1^*(t) \\ \quad - b_1 \int_0^\infty F(r)x_1^*(t-r)dr - c_2] \end{cases} \quad (1)$$

这里 a_i^* , b_i 和 c_i ($i=1,2$) 是非负实数。在这个模型中, x_i^* ($i=1,2$) 表示神经元的激活水平, b_i 反映过去结果对当前动态影响的大小, c_i 表示神经元的阈值。在函数 f 自变量中的项 x_i^* 表示一个局部反馈。权函数 $F(r)$ 是定义在 $[0, +\infty]$ 上的一个非负的有界函数,它描述过去结果对当前动态的影响。本文只讨论弱核,即

$$F(r) = \mu e^{-\mu r}, \mu > 0 \quad (2)$$

为了方便起见,我们设 $c_1 = c_2 = 0$, 对于 $c_1 \neq 0$ 或 $c_2 \neq 0$, 可类似讨论。令

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^*(t) - b_1 \int_0^\infty F(r)x_1^*(t-r)dr \\ x_2(t) = x_2^*(t) - b_2 \int_0^\infty F(r)x_2^*(t-r)dr \end{cases} \quad (3)$$

这样,系统(1)等价于下面的模型:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = -x_1(t) + a_1^* f[x_2(t) \\ \quad - a_1^* b_1 \int_0^\infty F(-r)f[X_2(t+r)]dr \\ dx_2(t)/dt = -x_2(t) + a_2^* f[x_1(t) \\ \quad - a_2^* b_2 \int_0^\infty F(-r)f[X_1(t+r)]dr \end{cases} \quad (4)$$

假设

$$f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, \text{ 且 } u \neq 0 \text{ 时, } uf(u) > 0 \quad (5)$$

当 $a_1^* a_2^* |1 - b_1| |1 - b_2| < 1/[f'(0)]^2$ 时,系统(4)存在唯一的平衡点 $(0, 0)$ 。

我们将非线性系统(4)式改写为矩阵形式:

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + \int_{-\infty}^0 A_1 F(-r)x(t+r)dr + H(x) - x \quad (6)$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 b_1 \\ -a_2 b_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$H(x) =$

$$\begin{pmatrix} a_1^{(2)} x_2^2(t) + a_1^{(3)} x_2^3(t) - a_1^{(2)} b_1 \int_{-\infty}^0 F(-s)x_2^2(t+s)ds \\ \quad - a_1^{(3)} b_1 \int_{-\infty}^0 F(-s)x_2^3(t+s)ds + \Lambda \\ a_2^{(2)} x_1^2(t) + a_2^{(3)} x_1^3(t) - a_2^{(2)} b_2 \int_{-\infty}^0 F(-s)x_1^2(t+s)ds \\ \quad - a_2^{(3)} b_2 \int_{-\infty}^0 F(-s)x_1^3(t+s)ds + \Lambda \end{pmatrix} \quad (8)$$

这里

$$a_i = a_i^* f'(0), a_i^{(2)} = \frac{1}{2} a_i^* f''(0), a_i^{(3)} = \frac{1}{6} a_i^* f'''(0), i=1,2$$

我们将平均时延 μ 作为分岔参数,并引入“状态反馈控制” $u = g(y; \mu)$, 得到一个带非线性反馈的线性系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_0 x + \int_{-\infty}^0 A_1 F(-r; \mu)x(t+r)dr + Bu \\ y = -Cx \\ u = g(y; \mu) = H(-y; \mu) + y \end{cases} \quad (9)$$

其中 $B = C = I$, 再对系统(9)式作拉普拉斯变换,得该系统线性部分的传输矩阵:

$$G(s; \mu) = C[sI - A_0 - \int_{-\infty}^0 A_1 F(-r; \mu) e^{rs} dr]^{-1} B$$

$$= \begin{pmatrix} s & -a_1 + a_1 b_1 \frac{\mu}{\mu+s} \\ -a_2 + a_2 b_2 \frac{\mu}{\mu+s} & s \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\Delta(s; \mu)} \begin{pmatrix} s & a_1[(1-b_1)\mu+s] \\ a_2[(1-b_2)\mu+s] & s \end{pmatrix} \quad (10)$$

这里

$$\Delta = \Delta(s; \mu) = s^2 - \frac{a_1 a_2 [(1-b_1)\mu+s][(1-b_2)\mu+s]}{(\mu+s)^2}$$

我们将反馈系统在平衡点 $y=0$ 处线性化, 得到相应的雅可比矩阵:

$$J = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{y=0} = I \quad (11)$$

设

$$h(\lambda, s; \mu) = \det[\lambda I - G(s; \mu) J]$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - \frac{s}{\Delta} & -\frac{a_1[(1-b_1)\mu+s]}{(\mu+s)\Delta} \\ -\frac{a_2[(1-b_2)\mu+s]}{(\mu+s)\Delta} & \lambda - \frac{s}{\Delta} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{2s}{\Delta} \lambda + \frac{1}{\Delta} \quad (12)$$

根据 Hopf 分岔理论知: 如果系统在 $\mu = \mu_0$ 处出现 Hopf 分岔, 则其在时域中的雅可比矩阵有一对纯虚的特征值 $\pm i\omega_0$ 。

下面我们应用耐奎斯特稳定性准则, 设 $s = i\omega$, 有下面的引理:

引理 1 如果非线性系统在时域中相应的雅可比矩阵将有一对纯虚的特征值 $\pm i\omega_0$, 则在频域中的常数矩阵 $[G(i\omega_0; \mu_0) J(\mu_0)]$ 有实特征值 $-1 + i0$ 。

设 $\lambda = \lambda(i\omega; \mu)$ 是矩阵 $[G(i\omega; \mu) J(\mu)]$ 的特征值, 并满足 $\lambda(i\omega_0; \mu_0) = -1 + i0$ 。那么

$$h(-1, i\omega_0; \mu_0) = 1 + \frac{2i\omega_0 + 1}{\Delta(i\omega_0; \mu_0)} = 0 \quad (13)$$

这里

$$\Delta(i\omega_0; \mu_0) = -\omega_0^2 - \frac{a_1 a_2 [(1-b_1)\mu_0 + i\omega_0][(1-b_2)\mu_0 + i\omega_0]}{(\mu_0 + i\omega_0)^2}$$

$$= -1 - 2i\omega_0$$

我们首先考虑 $b_2 = 0$ 的情形。方程(13)化为

$$a_1 a_2 [(1-b_1)\mu_0 + i\omega_0] = (\mu_0 + i\omega_0)(1 - \omega_0^2 + 2i\omega_0) \quad (14)$$

分离方程的实部和虚部, 可得:

$$\begin{cases} a_1 a_2 (1-b_1)\mu_0 = \mu_0(1-\omega_0^2) - 2\omega_0^2 \\ a_1 a_2 = 2\mu_0 + 1 - \omega_0^2 \end{cases} \quad (15)$$

于是

$$2\mu_0^2 + (4 - a_1 a_2 b_1)\mu_0 + 2(1 - a_1 a_2) = 0 \quad (16)$$

$$\omega_0^2 = 2\mu_0 + 1 - a_1 a_2 \quad (17)$$

方程(16)的根为

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} [(a_1 a_2 b_2 - 4) \pm \sqrt{a_1 a_2 (16 - 8b_1 + a_1 a_2 b_1^2)}] \quad (18)$$

考虑到 μ 是实数, 并且 $\mu > 0, \omega^2 > 0$, 我们讨论如下两种情形:

1) 假设 $a_1 a_2 < 1$, 可得:

若 $b_1 > (4/a_1 a_2)(1 + \sqrt{1 - a_1 a_2})$, 则 $\mu_+ > 0$ 且 $\mu_- > 0$;

若 $b_1 < (4/a_1 a_2)(1 + \sqrt{1 - a_1 a_2})$, 则 $\mu_+ < 0$ 且 $\mu_- < 0$,

或 μ_+ 与 μ_- 是共轭复数。

2) 假设 $1 \leq a_1 a_2 < 1 + 2\mu_0$, 可得 $\mu_+ > 0$ 且 $\mu_- \leq 0$ 。

这样, 我们得到下面的结果:

定理 1 Hopf 分岔存在性定理

• 48 •

1) 如果 $b_2 = 0, a_1 a_2 < 1$ 且 $b_1 > (4/a_1 a_2)(1 + \sqrt{1 - a_1 a_2})$, 则 $\mu_0 = \mu_+$ 和 $\mu_0 = \mu_-$ 都是系统(4)的 Hopf 分岔点。

2) 如果 $b_2 = 0, a_1 a_2 < 1$ 且 $b_1 < (4/a_1 a_2)(1 + \sqrt{1 - a_1 a_2})$, 则系统(4)的 Hopf 分岔点不存在。

3) 如果 $b_2 = 0$ 且 $1 \leq a_1 a_2 < 1 + 2\mu_0$, 则只有 $\mu_0 = \mu_+$ 是系统(4)的 Hopf 分岔点。

下面, 我们再考虑 $b_2 \neq 0$ 的情形。方程(13)化为

$$a_1 a_2 [(1-b_1)\mu_0 + i\omega_0][(1-b_2)\mu_0 + i\omega_0] = (\mu_0 + i\omega_0)^2 (1 - \omega_0^2 + 2i\omega_0) \quad (19)$$

分离方程的实部和虚部, 可得:

$$a_1 a_2 [(1-b_1)(1-b_2)\mu_0^2 - \omega_0^2] = (\mu_0^2 - \omega_0^2)(1 - \omega_0^2) - 4\mu_0 \omega_0^2, \quad (20)$$

$$a_1 a_2 \mu_0 (2 - b_1 - b_2) = 2[\mu_0^2 - \omega_0^2 + \mu_0(1 - \omega_0^2)] \quad (21)$$

于是

$$\begin{cases} 4(1 + \mu_0)^4 + c_3(1 + \mu_0)^3 + c_2(1 + \mu_0)^2 + c_1(1 + \mu_0) + c_0 = 0 \\ \omega_0^2 = \mu_0 [1 - \frac{a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2)}{2(1 + \mu_0)}] \end{cases} \quad (22)$$

这里 $c_3 = -2a_1 a_2 (b_1 + b_2 - 2b_1 b_2)$

$$c_2 = -4a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2 + b_1 b_2)$$

$$c_1 = (a_1 a_2)^2 (2 - b_1 - b_2)(b_1 + b_2)$$

$$c_0 = (a_1 a_2)^2 (2 - b_1 - b_2)^2 \quad (23)$$

将方程(22)改写为下面的形式:

$$[2(1 + \mu_0)^2 - a_1 a_2 (b_1 + b_2)(1 + \mu_0) - a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2)] \times [2(1 + \mu_0)^2 - a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2)] + 4a_1 a_2 b_1 b_2 (1 + \mu_0) \mu_0 = 0$$

考虑到 μ 是实数, 并且 $\mu > 0, \omega^2 > 0$, 可得:

$$\begin{cases} 2(1 + \mu_0)^2 - a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2) > 0 \\ 4a_1 a_2 b_1 b_2 (1 + \mu_0) \mu_0 \geq 0 \end{cases} \quad (24)$$

于是

$$2(1 + \mu_0)^2 - (a_1 a_2 (b_1 + b_2)(1 + \mu_0) - a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2)) \leq 0$$

令

$$2(1 + \mu)^2 - a_1 a_2 (b_1 + b_2)(1 + \mu) - a_1 a_2 (2 - b_1 - b_2) = 0 \quad (25)$$

方程(25)的两个根为

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{4} \{ [a_1 a_2 (b_1 + b_2) - 4] \pm \sqrt{a_1 a_2 [16 - 8(b_1 + b_2) + a_1 a_2 (b_1 + b_2)^2]} \} \quad (29)$$

这样, 我们得到下面的结果:

定理 2 Hopf 分岔存在的必要条件

系统(4)的 Hopf 分岔点 μ_0 必为方程(22)的根。

1) 如果 $a_1 a_2 \leq 1$ 且 $b_1 + b_2 > (4/a_1 a_2)(1 + 1 - \sqrt{a_1 a_2})$, 则系统(4)的 Hopf 分岔点只能在区间 $[\mu_-, \mu_+]$ 上。

2) 如果 $a_1 a_2 \leq 1$ 且 $b_1 + b_2 < (4/a_1 a_2)(1 + \sqrt{1 - a_1 a_2})$, 则系统(4)的 Hopf 分岔点不存在。

3) 如果 $a_1 a_2 > 1$, 则系统(4)的 Hopf 分岔点只能在区间 $(0, \mu_+)$ 上。

3. 数字模拟例子

在本节中, 为了证实前面计算的正确性, 我们完成了系统(4)在弱核情形下对于 a_1, a_2, b_1 和 b_2 的一些不同取值的数值计算结果。

1) 设 $a_1 = 3, a_2 = 0.8, b_1 = 0.9, b_2 = 15$, 得 $\mu_0 = 2.7534$ 。

取 $\mu_0 = 2.7534$, 在图 1 中, 取 $\mu = 2.72$, 存在一个稳定的周期

解;在图2中,取 $\mu=2.8$,不存在周期解。于是, $\mu_0=2.7534$ 是一个下临界 Hopf 分岔点。

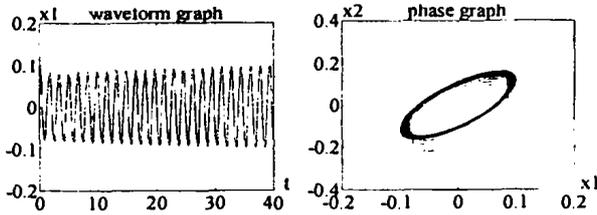


图1 $a_1=3, a_2=0.8, b_1=0.9, b_2=15, \mu=2.72$,
存在一个稳定的周期解。

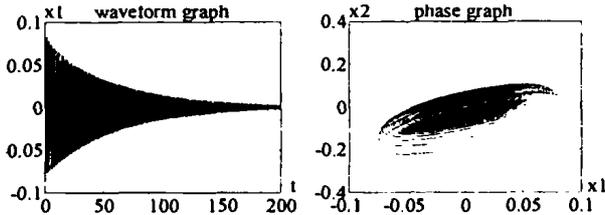


图2 $a_1=3, a_2=0.8, b_1=0.9, b_2=15, \mu=2.8$,
不存在周期解。

2) 设 $a_1=0.1, a_2=2, b_1=1.01, b_2=80$, 得 $\mu_0=0.2521$ 或 $\mu_0=0.6771$ 。

取 $\mu_0=0.2521$, 在图3中, 取 $\mu=0.2$, 不存在周期解; 在图4中, 取 $\mu=0.3$, 存在一个稳定的周期解;

于是, $\mu_0=2.7534$ 是一个上临界 Hopf 分岔点。

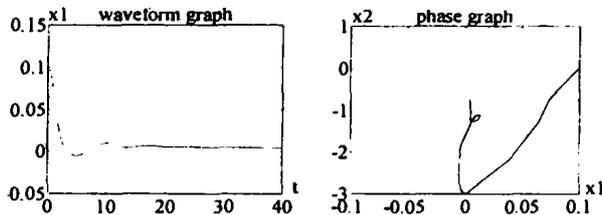


图3 $a_1=0.1, a_2=2, b_1=1.01, b_2=80, \mu=0.2$,
不存在周期解。

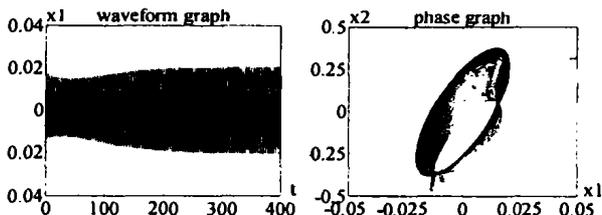


图4 $a_1=0.1, a_2=2, b_1=1.01, b_2=80, \mu=0.3$,
存在一个稳定的周期解。

取 $\mu_0=0.6771$, 在图5中, 取 $\mu=0.65$, 存在一个稳定的周期解;

在图6中, 取 $\mu=0.7$, 不存在周期解。于是, $\mu_0=2.7534$ 是一个下临界 Hopf 分岔点。

结论 本文用频域方法研究了弱核连续时延双神经元模型, 特别是其中参数 $b_2 \neq 0$ 的情形。这种情形用通常的时域方法处理较为复杂。我们将平均时延作为分岔参数, 显示了当参数通过某一临界值时发生了 Hopf 分岔。

我们还可以通过文[11]提供的方法, 在分岔点附近画出

振幅轨迹 L_1 和特征曲线 $\lambda(i\omega)$, 而确定分岔方向和周期解的稳定性。这个问题我们将在另一篇文章加以阐述。

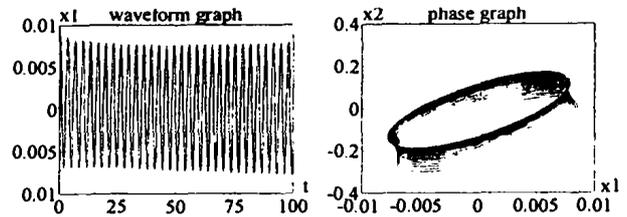


图5 $a_1=0.1, a_2=2, b_1=1.01, b_2=80, \mu=0.65$,
存在一个稳定的周期解。

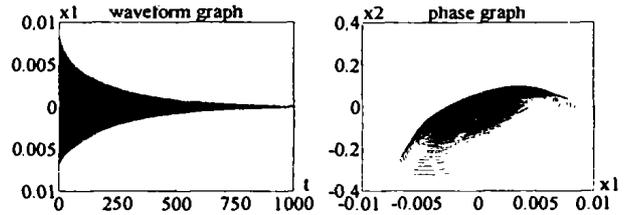


图6 $a_1=0.1, a_2=2, b_1=1.01, b_2=80, \mu=0.7$,
不存在周期解。

参考文献

- 1 Hopfield J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. In: Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1984, 81: 3088~3092
- 2 Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural network with delay. Phys. Rev. A 1989, 39: 347~359
- 3 Olien L, Belair J. Bifurcations, stability and monotonicity properties of a delayed neural network model. Physica D 102, 1997: 349~363
- 4 Gopalsamy K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield networks with transmission delays. Physica, 1994, D76: 344~358
- 5 Belair J, Dufour S. Stability in a three-dimensional system of delay-differential equations. Can. Appl. Math. Quart, 1996, 4: 135~156
- 6 Van den Driessche P, Zou X. Global attractivity in delayed Hopfield neural network model. SIAM J. Appl. Math. 1998, 58: 1878~1890
- 7 Ye H, Michel A N, Wang K. Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays. Phys. Rev. 1994, E50: 4206~4213
- 8 Liao X, Yu J. Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay. IEEE Trans. 1998, NN 9(5): 1042~1046
- 9 Gopalsamy K, Leung I. Delay-induced periodicity in a neural network of excitation and inhibition. Physica, 1996, D89: 395~426
- 10 Wei J, Ruan S. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays. Physica, 1999, D 130: 255~272
- 11 Moiola J L, Chen G. Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach. World Scientific, Singapore, 1996
- 12 Liao X F, Wong K W, Wu Z F. Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays. Physica, 2001, D 149: 123~141
- 13 Gopalsamy K, Leung I. Convergence under dynamical thresholds with delays. IEEE Trans. 1997, NN 8 (2): 341~348