

基于灰色理论的预测系统框架与实现

The Study and Implementation of Predict Algorithm Based on Gray Theory

彭 晖 沈亚军

(湖南湘潭师范学院数学与计算机科学系 湖南湘潭 411201)

Abstract One important and applicable area about Gray Theory is prediction and analysis. Through deducing and improving the prediction algorithm in details, a prediction system frame is brought up, then the problems found in the implementation of the system frame are explained and solved. A example is given to show how the system works at the last part of the article.

Keywords Gray theory, Prediction algorithm, Prediction system, One order linear dynamic model

1 引言

1982年我国学者邓聚龙教授首次在荷兰的国际性杂志上发表了灰色理论,它是建立在灰色系统基础之上的计算理论。从系统的观点来看,我们称信息完全明确的系统为白色系统,信息完全不明确的系统为黑色系统,信息部分明确部分不明确的系统为灰色系统。现实世界中的绝大多数系统都属于灰色系统的范畴,而且同一个系统,在高层次时可能是“白色”的,到了低层次时却可能是“灰色”的。因此运用灰色控制理论来认识世界,来解决白色系统理论无法解决的问题,具有重要的意义。灰色理论的一个重要的应用领域是趋势预测。传统的预测方法,建立的是离散的递推模型,这一局限使得它不能对系统做出长期预测。灰色理论利用连续的灰色微分方程模型,对系统的发展变化进行全面的观察分析,并能作出长期预测,其预测精度之高是其他预测方法所无法比拟的。采用灰色理论作为预测和决策的基础理论,吸收线性规划、运筹学等分析方法,分析问题的可控性、可观性、可达性,进而对各类数据进行深度加工,对有关变化做出预测,具有重要的理论和应用价值。

2 灰色理论预测算法分析

2.1 一阶线性动态预测模型预测公式^[1]

在灰色理论中,受 N 个变量 $X_1, X_2, \dots, X_N$ 约束的随机变量 X 的 H 阶微分方程记作 $GM(H, N)$:

$$d^H x^{(1)} / dt^H + a_1 d^{H-1} x^{(1)} / dt^{H-1} + \dots + a_{H-1} dx^{(1)} / dt + a_H x_1^{(1)} = b_1 x_1^{(1)} + \Lambda + b_{H-1} x_{H-1}^{(1)} \quad (1)$$

由此可得单序列的一阶线性动态模型 $GM(1, 1)$, 该模型是一种常用的预测模型,实际上是 $GM(H, N)$ 的特殊形式。其相应的微分方程(取 $H=1, N=1$)可以化简为:

$$dx^{(1)} / dt + ax^{(1)} = u \quad (2)$$

其中 X 是随机变量本身, a 与 u 是待定系数, $x^{(1)}$ 表示 X 的一次累加生成数列:

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} x^{(0)}(m) \quad k=1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

其中 N 为数据长度。因为实际数据多为随机的,经过一次累加后弱化了实际数据的随机性,累加次数越多则实际数据的随机性越被弱化,其体现出来的规律性也越强。对方程(2)采用最小二乘法求解待定参数 a, u 可得:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = [B^T B]^{-1} B^T Y_N \quad (4)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -1/2[x^{(1)}(0) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ -1/2[x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)] & 1 \\ \dots & \dots \\ -1/2[x^{(1)}(N-3) + x^{(1)}(N-2)] & 1 \\ -1/2[x^{(1)}(N-2) + x^{(1)}(N-1)] & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_N = [x^{(0)}(1) x^{(0)}(2) \dots x^{(0)}(N-1)]^T$$

由一阶线性微分方程理论,方程(2)的连续解为:

$$x^{(1)}(t) = (x^{(1)}(0) - u/a) \cdot e^{-at} + u/a \quad (5)$$

由一阶线性微分方程特值法(令 $t=1$),代入公式(5)中,同时以离散下标 k 代替连续时间参数 t ,进而可得方程(2)离散解:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = [x^{(1)}(0) - u/a] \cdot e^{-ak} + u/a, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

微机系统中处理的是离散数值,故式(6)是实用的预测数据一次累加和生成公式。由原始数据的一次累加和的预测值可以还原出原始数据的预测值,比较式(3)和式(6),可以得出最终的预测公式:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(k) = [x^{(0)}(0) - u/a](1 - e^{-a}) \cdot e^{-ak} & k=1, 2, \dots, N-1 \\ \hat{x}^{(0)}(0) = x^{(0)}(0) & k=0 \end{cases} \quad (7)$$

取 $k=N$ 时得第一个预测值, $k=N+1$ 时得第二个预测值,以此类推。

2.2 一阶线性动态预测模型检验与修正公式

建立起预测模型后,必须检验模型的可信程度,根据需要进行必要的修正。在预测模型精度未达到一定标准前,不可以进行实际预测。模型可信度的检验一般有两种方法:灰色后验差检验法、关联度检验法。其中关联度检验法比较实际值和预测值各在实际值序列和预测值序列中的相对大小,找出差别中的最大值和最小值,进而求得实际、预测数据之间的关联度系数。这种方法一般用于衡量最终预测值的可信程度,在下面的预测结果分析中有介绍。现有的预测系统中一般采用后验差检验法检验模型精度,这是灰色系统理论特有的检验方法。后验差检验法利用两个参数:方差比 c 、小误差频率 p 检验模型的可靠性。记第 k 个数据的残差为:

$$\epsilon^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k), \quad k=1, 2, \dots, N-1$$

彭 晖 讲师,主要研究方向:计算机算法,计算机网络。沈亚军 副教授,硕士生导师。

$$\text{残差方差: } S_1^2 = 1/N \cdot \sum_{k=1}^N (\varepsilon^{(0)}(k) - \bar{\varepsilon})^2$$

其中 $\bar{\varepsilon}$ 为残差均值: $\bar{\varepsilon} = 1/N \sum_{k=1}^N \varepsilon^{(0)}(k)$ 。

$$\text{实际数据方差: } S_2^2 = 1/N \cdot \sum_{k=1}^N (x^{(0)}(k) - \bar{x})^2$$

其中 $\bar{x}$ 为实际数据均值: $\bar{x} = 1/N \sum_{k=1}^N x^{(0)}(k)$ 。

$$\text{后验差比值(又称方差比): } c = S_1/S_2 \quad (8)$$

小误差概率:

$$p = P\{\varepsilon^{(0)}(k) - \bar{\varepsilon} < 0.6745 \cdot S_2\}, k=1, 2, \dots, N-1 \quad (9)$$

由于原点误差可以比较全面、直观地反映实际数据与预测数据之间地相似性,我们在实际的预测模型中加入了另一个判别参数,即原点误差:

$$\bar{\varepsilon} = 1/(N-1) \cdot \sum_{k=2}^N |\varepsilon^{(0)}(k)| \times 100\% \quad (10)$$

将上述三个参数和精度表中对应项比较,如果模型精度达到要求的等级,可以进行后面的预测部分,否则可以利用残差数列进行模型修正。修正方法:将 N 个残差数据作为一组原始数据输入建模部分,按照 2.1 节的步骤可以产生一个预测模型,实质也是一个离散预测模型,将这个预测模型和原有的预测模型迭加即得新的预测模型。检验新的预测模型的预测精度:由此新的预测模型据产生新得残差数列,仿上产生三个参数:后验差比值 c 、小误差概率 p 和原点误差 $\bar{\varepsilon}$ 。如果仍未达到要求的精度等级,则可以利用新的残差数列进行模型修正,再检验,再修正,直至达到一定的模型精度,或在指定的修正次数内无法达到要求精度退出。如果上述方法在一定的修正数内达到要求的模型精度,则可以进行后面的实际预测部分,此时的预测公式即为经过修正的最优预测公式。

2.3 一阶线性动态预测模型预测结果分析

由上面的最优预测公式产生预测数据,还应该判断预测数据的可信程度,可以通过以下两个步骤进行:

2.3.1 关联度分析

原始数据的平均值: $\bar{x} = 1/N \sum_{k=1}^N x^{(0)}(k)$

原始数据的相对值: $z(k) = \sum_{i=1}^N x^{(0)}(k) / \bar{x}$

预测数据的平均值: $\bar{\hat{x}} = 1/N \sum_{k=1}^N \hat{x}^{(0)}(k)$

预测数据的相对值: $\hat{z}(k) = \sum_{i=1}^N \hat{x}^{(0)}(k) / \bar{\hat{x}}$

原始、预测数据关联数组: $\Delta(k) = |z(k) - \hat{z}(k)| \quad (11)$

取最大差百分比为 50, 即 $\rho = 0.5 \quad (12)$

令 $\sigma = \rho \Delta(k)_{\max} = 0.5 \Delta(k)_{\max}$, 由公式(11)可得关联度系数:

$$\gamma = (\Delta(k)_{\min} + \sigma) / (\Delta(k)_{\max} + \sigma) \quad (13)$$

由公式(12), 有经验阈值 $\gamma_0 = 0.6$, 如果关联度系数 $\gamma > \gamma_0$, 预测结果为可信。

2.3.2 灰色平面分析 利用灰色平面可以判断预测值的可信度。灰色平面的定义如下: 根据历史记录可以得出预测变量变化率的上、下界 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$, 在灰色理论中存在灰色平面:

$$\begin{cases} x_{\max}^{(1)}(n+k) = x^{(1)}(n)(1+\sigma_{\max})^k \\ x_{\min}^{(1)}(n+k) = x^{(1)}(n)(1+\sigma_{\min})^k \end{cases} \quad (14)$$

如果预测值的一次累加和落在灰色平面内, 则预测结果可信。灰色平面法根据历史经验判断预测值的合理性, 和前面的检验和修正部分独立。

3 预测系统框架结构分析

通过对预测算法的分析, 我们提出如图 1 所示的预测系统框架。

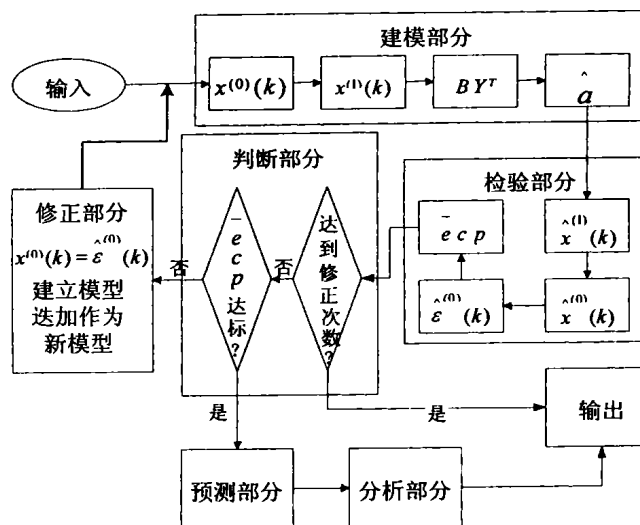


图 1 预测系统框架图

系统由输入、建模、检验、判断、修正、预测、分析和输出八个基本的模块组成, 各个模块的功能为:

输入模块: 提供建立预测模型的原始数据, 包括用于预测的数据和用于检验预测结果的数据。

建模模块: 运用一阶线性动态预测模型预测公式建立初始预测模型。

检验模块: 从预测模型计算出预测数据, 运用一阶线性动态预测模型检验与修正公式计算预测数据和预测结果检验数据的方差比、小概率误差和原点误差。

判断模块: 判断对预测模型的修正次数是否已达到预定的修正次数, 如果已达到预定的修正次数, 则输出原始数据不能预测并退出系统; 如果没有达预定的修正次数, 则进一步判断预测结果是否达标, 如果达标, 则根据已建好的预测模型进行后继的实际预测工作; 如果没有达标, 修正预测模型, 按新模型进行下一轮预测。

修正模块: 利用残差数列修正预测模型, 将修正模型与原模型迭加形成新的预测模型。

预测模块: 根据修正好的预测模型计算预测结果。

分析模块: 使用关联度分析法和灰色平面分析法分析预测结果的可信度。

输出模块: 输出预测结果及结果分析。

4 系统实现

4.1 预测系统实现过程中的一些需要说明的问题

4.1.1 输入模块 用于建立模型的数据理论上只要超过三个即可, 数据量的增加将影响计算速度, 但数据量太少则不能很好地体现数据的统计规律, 进而影响到预测模型的精度等级, 一般取五到八个数据较为适合。部分数据由于统计规律太差, 数据之间变化较大, 连贯性差, 可能在规定的时间和精度要求下不能建立起预测模型。实际上并不是所有的数据都可以预测, 有些预测结果是没有太大意义的, 比如受非自然因素影响太多的股票价值变化。

4.1.2 检验模块 由于预测模型是否合格完全由精度表决定, 故精度表的制定十分重要。在确定三个参数各达到何种指标对应何种精度等级(如: 好、合格、勉强、不合格等)时, 由于不同的应用对三个参数的看重程度不尽相同, 故应该根据实际需要制定精度表, 考虑那些参数应该严格控制, 那些指

标应该适当放宽、或加入新的参数。同时由于参数间可比性不强,参数的权重无法具体衡量,因此很难用一个式子综合衡量三个参数的综合权重,也就无法衡量同一精度等级上两个模型的优劣。但是我们可以知道参数变化方向的意义(如百分比误差越小越好),故只要记录参数改变的方向,即使在同一个精度等级内,只要参数一致变“好”,则可以认为模型精度提高了。

4.1.3 修正模块 模型优化过程中修正的作用是有限的,随着修正次数的增加,修正公式的迭加效果越来越不明显,因此存在着一种运算时间和精度的权衡,在实践中我们取一定修正次数内(如100次)的最优预测模型进行预测。同时预测建模数据要求为正,但在修正过程中利用残差建模时残差可能为负,应该加一适当的偏移量后再建模,在产生修正数据时应该去掉偏移量,然后再与前次预测值相加作为新的预测值与实际值比较,注意每次计算残差时必须以实际数据为基准数据。

4.1.4 预测效果 一般来说,一组数据的修正效果要么逼近高精度,要么逼近低精度(修正后模型各个参数变坏)。在设计时为了获得最佳的预测效果,可以初始化精度等级为0级,每次产生模型后先判断是否为最高等级,如果是则退出修正部分直接进行后面的预测部分,如果不是最高等级,则判断当前等级是否优于上一步的等级,如果优于则将原预测模型替换为当前模型。算法最后必然产生指定修正次数内的最佳预测模型(对不能预测的数据来说,无法建立预测模型也是一种“最佳”)。

4.2 预测系统应用实例

对以上预测系统进行编程实现后(源代码略)^[2],我们对某省民用车辆拥有量中民用汽车合计量(辆)进行了预测,取得了较好的效果。下面对其中关键步骤的实际数据做出说明,通过这些数据,可以对这一预测算法有一个直观的认识。

4.2.1 原始数据

年份	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
合计量	148780	169056	180989	187524	203538	229094	265534	321074

4.2.2 精度表(经验值)

等级 阈值	好	较好	合格	勉强	不合格
$\bar{e}$	< 0.05	< 0.08	< 0.10	< 0.15	≥ 0.15
C	< 0.80	< 0.85	< 0.95	< 1.10	≥ 1.10
P	> 0.80	> 0.60	> 0.40	> 0.27	≤ 0.27

前四个等级中参数必须全部满足阈值,“不合格”等级只需一个参数满足条件则可。最大修正次数为100次,预测

修正次数	A	U	$\bar{e}$	C	P
0	-0.1131	128344.94	0.0511	0.2247	0.9999
1	0.1431	22699.07	0.0428	0.2167	0.9999

(上接第77页)

为其逻辑图像,然后,提取图像的矩特征进行图像匹配,从而显著减少了运算量提高了匹配效率。以上实验源图片均来自标准图像库,未涉及光照度变化的情况。

参考文献

- 1 Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants. IEEE

1995,1996年的合计量。

4.2.3 修正次数

模型首先达到等级“较好”,继续修正,发现新的等级“好”优于原来的等级“较好”,将原模型替换为新模型。由于等级“好”为最高等级,模型即退出修正过程,输出最佳等级“好”。对应的预测公式为两个预测公式的迭加:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = [x^{(0)}(0) - u_0/a_0](1 - e^{a_0}) \cdot e^{-a_0 k} + [x^{(0)}(0) - u_1/a_1](1 - e^{a_1}) \cdot e^{-a_1 k}$$

分别令 $k=8$ 和 9 可得 1995、1996 年合计量的预测值分别为 339719.64 和 380276.98,因车辆单位为辆,取整后为 339720 和 380277。比较 1995 和 1996 年合计量的实际数据:339112 和 379702 辆,该预测模型具有很高的精度。

4.2.4 预测结果的灰色平面分析 根据历年来的政策法规和民用车辆合计量的增长情况,可知合计量高增长率为 30%,低增长率为 5%。因此 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 分别为 0.30 和 0.05。由输入的 1987~1994 年拥有量的原始数据, $x^{(1)}(8) = 1705589$,根据式(14),可作灰平面如图 2,图中 $n=8$ 时对应 1994 年的一次累加和 1705589 辆, n 为 9 和 10 时分别对应 1995 和 1996 年的一次累加和的预测值 $\hat{x}^{(1)}(9)$ 和 $\hat{x}^{(1)}(10)$,它们落在了灰色平面里,预测结果可信。

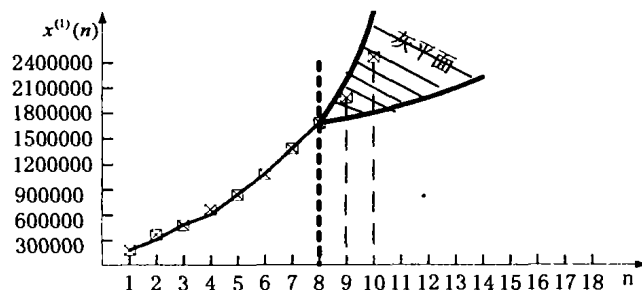


图 2

结束语 本文在对灰色理论的研究基础上,对基于灰色理论的预测算法进行了详细的推导,提出了一种预测系统结构框架,具体实现了一个基于灰色理论的预测系统。在系统的实现过程中,充分考虑了系统自身的特点,占用尽可能少的系统资源,同时注意提高执行效率,节约时间开销。预测系统不需要大量样本(三个以上数据就可以),也不需要数据群存在典型的统计分布规律,和其他预测系统相比,具有计算工作量大,预测精度高的优点。因此它很适于社会经济领域的预测,具有较高使用价值。

参考文献

- 1 邓聚龙. 灰色控制系统. 华中理工大学出版社, 1985
- 2 [美] Jamie Jaworski. JAVA 开发指南. 北京: 中国水利水电出版社, 1997

Trans on information Theory, 1962, 8(1): 179~187

- 2 Mukundan R. Moment function in Image analysis: theory and application. World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd 1998
- 3 刘贵忠, 邸双亮, 著. 小波分析及其应用. 西安电子科技大学出版社, 1992. 5
- 4 杨福生, 著. 小波变换的工程分析与应用. 科学出版社, 2000. 1
- 5 王耀明, 严炜. 基于 Radon 变换的图像矩特征抽取及其在图像识别中的应用. 计算机工程, 2000, 9