维普资讯 http://www.cqvip.com

环境自动机的测试等价类

Equivalence of Tests of Environment Automata

沈 虹

(西安工业学院计算机科学与工程系 西安 710032)

Abstract In this paper reducibility of environment automata is discussed and the condition of environment automata to be reduced is given. The structure of equivalence classes of tests of environment automata is also discussed.

Keywords Environment automata, Reduce, Equivalence classes, Test

一、引言

在自动机理论中常常对于标准的 Moore 自动机增加某些装置构成用于各种不同用途的自动机，它们常用于语言的识别器、算法设计和分析、人工智能、机器学习、机器人的环境等等。R.L.Rivest 和 R.E.Schapire 在文[1]中，引用了 Angluin[2]提出的学习自动机的模型，建立了测试等价类的概念，应用这个概念，成功地描述了机器人的环境和复杂环境下的学习问题。

Angluin 提出的自动机模型为 6-维组：

$\mathscr{E}=(Q,B,P,\delta,q_0,\gamma)$

其中：Q—自动机状态的有限非空集合；B—有限非空的符号集合，在描述机器人环境时，B 中的元素称为基本行为；P—有限非空的谓词符号集合，也称其中的元素为感知；q_0—是 Q 中的一个元素，称为初始状态；δ—是转换函数，$\delta:Q\times B\rightarrow Q$；γ—是感知函数，$\gamma:Q\times P\rightarrow\{true,false\}$。

当 $|P|=1$ 时，$P=\{p\}$，集合 $F=\{q\mid q\in Q,\gamma(q,p)=true\}$，便是通常的终止状态集合。这就是标准的 Moore 自动机模型。在这里我们不难看出 Angluin 引进了谓词符号集合 P 和感知函数 γ，可以变化地决定机器人感知的哪些行为序列是正确的，可以接受的，哪些行为序列是错误的，不可接受的。它体现了机器人的学习过程。我们把 $\mathscr{E}$ 称为环境自动机。

R.L.Rivest 和 R.E.Schapire 在文[1]中，对于既约自动机引进了测试等价类的概念，通过对于测试等价类的计算，设计机器人的行为。所谓自动机 $\mathscr{E}$ 是既约的，如果

$\forall q,r\in Q,q\neq r\Rightarrow\exists\ t\in T$，使 $qt\neq rt$

这里 T 是 $\mathscr{E}$ 的全体测试的集合，而所谓一个测试，即 $t=b_1b_2\cdots b_mp$，$b_i\in B$ 是一个基本行为，$p\in P$，是一个谓词。我们常把一个基本行为序列记为 $a=b_1b_2\cdots b_m$。而 $A=B^*$，并采用如下简单记法：

$\gamma(\delta(q,\ b_1b_2\cdots b_m),p)=qb_1b_2\cdots b_mp=qap=qt$

其值为 true 或 false，称为测试 t 在状态 q 下的值。于是一个自动机称为是既约的，如果对于其中任意不同的状态，都存在一个测试，在这两个状态下的测试值不同。

对于一个既约的环境自动机 $\mathscr{E}$，所谓两个测试 t_1 和 t_2 是等价的，如果

$\forall q\in Q,qt_1=qt_2$。

记为 $t_1\equiv t_2$。文[1]讨论了测试等价类，并特别对于置换环境自动机给出了这些等价类的结构。

本文则给出了一个环境自动机是既约自动机的判别条件，并给出了计算既约自动机的算法，并就一般情况讨论了环境自动机的测试等价类的结构。

二、环境自动机的既约性

对于标准的 Moore 自动机，即 $|P|=1$ 的情形，我们已经有了最小自动机的概念[3]。并且有计算最小自动机的算法。作为本文的第一个结果，我们要指出，在 $|P|=1$ 时，既约自动机和最小自动机的概念是等价的。

在一个标准的 Moore 自动机 $M=(Q,B,\delta,q_0,F)$ 的状态集 Q 上建立一个状态间的右同余关系 R_F：

$(q_1,q_2)\in R_F\ q_1,q_2\in Q\Leftrightarrow q_1ap=q_2ap,\ \forall\ a\in A,p\in P=\{p\}$。

即当 $(q_1,q_2)\in R_F$ 时，对于任意的行为序列 a，在状态 q_1 和 q_2 下，都将同时进入终止状态集或者同时不进入终止状态集。而和 M 有相同行为的最小自动机是商自动机 M/R_F[3]：

$M/R_F=(Q/R_F,B,[q_0],\delta',F/RF)$

于是我们不难看出，一个 Moore 自动机 M 是既约的，当且仅当 $R_F=I_Q$，I_Q 是 Q 上的恒等关系。因而有：

引理 1 在 $|P|=1$ 时，环境自动机 $\mathscr{E}$ 是既约的，当且仅当它是最小自动机。

我们来考虑 $|P|>1$ 的情形。设 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$，有 r 个谓词。令

$F_i=\{q\mid q\in Q,\gamma(q,p_i)=true\}$。

我们可以把一个环境自动机 $\mathscr{E}$ 理解为 r 个 Moore 自动机，它们有相同的状态集，基本行为集，转换函数和初始状态，所不同的是 r 个终止状态集合 F_i 各不相同。它们对应于每一个谓词 p_i。对于每一个 F_i，我们有一个 Q 上的右同余 R_i：

$(q_1,q_2)\in R_i,q_1,q_2\in Q\Leftrightarrow q_1ap_i=q_2ap_i,\forall\ a\in A,p_i\in P$ 。

令 $R=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant r}R_i$，则

定理 1 环境自动机 $\mathscr{E}$ 是既约的，当且仅当 $R=I_Q$。

证明：⇒)假设 $\mathscr{E}$ 是既约的，对于任意一个 $(q_1,q_2)\in R$。若 $q_1\neq q_2$，则应有一个测试 $t=ap_i$，$a\in A$，$p_i\in P$，使 $q_1t\neq q_2t$，即 $q_1ap_i\neq q_2ap_i$。这和 $(q_1,q_2)\in R_i$ 相矛盾。因此只有 $q_1=q_2$。又由于 $R_i\supseteq I_Q$，故 $R_i=I_Q$。

⇐)如果 $I_Q=R=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant r}R_i$。对于 $q_1,q_2\in Q$，$q_1\neq q_2$，$(q_1,q_2)\notin R$，存在 i，使 $(q_1,q_2)\notin R_i$，所以有 $a\in A$，使 $q_1ap_i\neq q_2ap_i$。因此 $\mathscr{E}$ 是既约的。 □

若环境自动机 $\mathscr{E}=(Q,B,P,\delta,q_0,\gamma)$ 不是既约的，即 $R\neq I_Q$，作商自动机 $\mathscr{E}/R$：

$\mathscr{E}/R=(Q/R,B,P,\delta',[q_0],\gamma')$，

其中：Q/R 一是集合 Q 模 R 的商集合；$[q_0]$—为 q_0 所在的 R-

维普资讯 http://www.cqvip.com

类，是商自动机的初始状态；δ'—转换函数，δ'：$Q/R\times B\to Q/R$，$\delta'([q],b)=[\delta(q,b)]$，也简记为$[q]b=[qb]$；$\gamma'$—感知函数，$\gamma'$：$Q/R\times P\to\{true,false\}$，$\gamma'([q],p_i)=q\ p_i$；B 和 P 同于原环境自动机。

我们要证明函数 δ' 和 γ' 的合理性。事实上，对 $q_1,q_2\in[q]$，由于$(q_1,q_2)\in R$，故对 $b\in B$，设 $q1'=\delta(q_1,b)=q_1b$，$q_2'=\delta(q_2,b)=q_2b$，为为验证$(q_1',q_2')\in R$，取 $a\in A$，$p_i\in P$，$q_1'a\ p_i=\gamma(q_1'a,p_i)=\gamma(\delta(\delta(q_1,b),a),\ p_i)=\gamma(\delta(q_1,b_a),p_i)=q_1(b_a)\ p_i=q_2(b_a)p_i=\gamma(\delta(q_2,b_a),p_i)=\gamma(\delta(\delta(q_2,b),a),p_i)=\gamma(\delta(q_2',a),p_i)=q_2'a\ p_i$。

所以如上定义的转换函数 δ' 是合理的。

对于感知函数 γ'，由于$(q_1,q_2)\in R$，对于 $p_i\in P$，$q_1p_i=q_1'p_i=q_2'p_i=q_2p_i$。所以定义合理。我们有

定理 2 商自动机 $\mathscr{E}/R$ 是一个和环境自动机 $\mathscr{E}$ 有相同测试等价类的既约自动机。

证明：先证 $\mathscr{E}/R$ 是既约的。对于任$[q_1]\neq[q_2]$，则$(q_1,q_2)\notin R$，因而存在 i，使$(q_1,q_2)\notin R_i$，故存在 $a\in A$，使 $q_1ap_i\neq q_2ap_i$。而

$[q_1]ap_i=[q_1a]p_i=q_1ap_i\neq q_2ap_i=[q_2a]p_i=[q_2]ap_i$。

所以 $\mathscr{E}/R$ 是既约的。

再证两个自动机有相同的测试等价类。

考虑 $\mathscr{E}$ 的任意一个测试等价类$[t]_{\mathscr{E}}$，取 $t_1\in[t]_{\mathscr{E}}$，于是对于任 $q\in Q$，$q_i=qt_1$，因而对任意的$[q]\in Q/R$，$[q]t=qt=qt_1=[q]t_1$。所以 $\mathscr{E}$ 的测试等价类是 $\mathscr{E}/R$ 的测试等价类。显然反之也成立。 □

我们看到要计算和环境自动机 $\mathscr{E}$ 有相同测试等价类的既约自动机 $\mathscr{E}/R$，关键在于计算等价关系 R，基于计算关系 R_i 的算法（文[3]第一章§5 算法 1）。我们容易给出计算右同余 R 的算法。

算法 1 设环境自动机 $\mathscr{E}=(Q,B,P,\delta,q_0,\gamma)$，$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$，对于每一个 $p_i\in P$，$F_i=\{q|q\in Q,\gamma(q,p_i)=true\}$。

1. 令 $i=1$，
2. $h=0$，E_{i0}是 Q 上如下定义的等价关系：
   $(q_1,\ q_2)\in E_{i0}\Leftrightarrow q_1p_i=q_2p_i$即 $q_1\in F_i$ iff $q_2\in F_i$
3. 假设等价关系 $E_{i,h-1}$已经定义，现定义等价关系 E_{ih}：
   $(q_1,q_2)\in E_{ih}\Leftrightarrow(q_1,q_2)\in E_{i,h-1}$，且$(q_1b,\ q_2b)\in E_{i,h-1}$，$\forall\ b\in B$，
4. 若 $E_{ih}=E_{ih-1}$，则 $R_i=E_{ih-1}$，否则 $h=h+1$ 返回 3，
5. 若 $i<r$，则令 $i=i+1$，返回 2，
6. 令 $R=\bigcap_{i=1}^{r}R_i$。

例 1 环境自动机 $\mathscr{E}=(Q,B,P,\delta,q_0,\gamma)$，其中 Q，B 和 δ 如下表给出：

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a	q_1	q_1	q_2	q_1	q_6	q_5	q_6
b	q_2	q_3	q_4	q_5	q_2	q_3	q_6

$P=\{p_1,p_2\}$，γ 函数如下表给出：

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
P_1	F	F	T	F	T	F	T
P_2	F	F	F	T	T	T	T

对于 P_1，我们确定的 R_1 类为：

$\{q_2,q_4,q_6\},\{q_0\},\{q_1,q_3,q_5\}$，

对于 P_2，我们确定的 R_2 类为：

$\{q_0\},\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\},\{q_4\},\{q_5\},\{q_6\}$。

因此，$R=R_1\cap R_2=I_Q$。

三、环境自动机的测试等价类

现在假设环境自动机 $\mathscr{E}=(Q,B,P,\delta,q_1,\gamma)$是既约的，$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$。我们来考虑它的测试等价类的结构。

先看$|P|=1$ 的情形。任一测试 $t_1=a_1p$，$t_2=a_2p$，$a_1,a_2\in A$，$p\in\{p\}=P$。$t_1\equiv t_2$，当且仅当对任意的 $q_i\in Q$，$q_i\ t_1=q_i\ t_2$。

和前面一样，如果我们令 $F=\{q|q\in Q,\gamma(q,p_i)=true\}$。于是

$t_1\equiv t_2$，当且仅当对任意的 $q_i\in Q$，$q_i\ a_1\in F$ 和 $q_i\ a_2\in F$ 同时成立或者同时不成立。

如果在自动机 $\mathscr{E}$ 中，我们分别以 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为初始状态，仍然以 F 为终止状态集，于是我们可以得到 n 个相应的 $\mathscr{E}$ 的行为集合 $L_1,L_2,\cdots,L_n$。每个行为集 L_i 对 $A=B^*$ 作了秩为 2 的划分$\{L_i,\bar{L}_i\}$。共有 n 个这样的划分。我们再作这 n 个划分的交叉划分，这个交叉划分的任意一块为：

$\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2\cap\cdots\cap\tilde{L}_n$，

其中 $\tilde{L}_i$ 是 L_i 或者 $\bar{L}_i$。于是我们可以用一个 n 位二进制数来给这些块编码，这个 n 位二进制数的第 i 位是 1，当且仅当 $\tilde{L}_i$ 是 L_i，否则第 i 位是 0。

我们容易证明，这个交叉划分给出了环境自动机 $\mathscr{E}$ 的测试等价类。

实际上，若 $t_1\equiv t_2$，则对于任意 $q_i\in Q$，有 $q_i\ a_1\in F$ 和 $q_i\ a_2\in F$ 同时成立或者同时不成立，即 a_1 和 a_2 同时在 L_i 或者 L_I 中。因此 a_1 和 a_2 同时在交叉划分的一个块中。反之，任取 a_1，$a_2\in\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2\cap\cdots\cap\tilde{L}_n$，则对任意的 q_i，有 $a_1,a_2\in\tilde{L}_i$ 中，因而 $t_1=a_1p\equiv a_2p=t_2$。

所以，$\mathscr{E}$ 的测试等价类为：

$\{\tilde{L}_1p\cap\tilde{L}_2p\cap\cdots\cap\tilde{L}_np\ |\ \tilde{L}_i=L_i$ 或者 $\tilde{L}_i=\bar{L}_i,i=1,2,\cdots,n\}$

对这些测试等价类编码的 n 位二进制数和 $\mathscr{E}$ 的测试等价类 1-1 对应，当然某一个编码所对应的测试等价类也可能是空集。

在 $P=\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$，$r>1$ 时，对任意一个 $p_i\in P$，令

$F_i=\{q|q\in Q,\gamma(\ q,p_i)=true\}$

于是对于 $q_i\in Q$，以 q_i 为初始状态，产生一个行为集 L_{ij}，把 A 划分为 L_{ij}和 $\bar{L}_{ij}$，和 $r=1$ 的情形一样，对于每一个 p_j，如果固定谓词 p_j，我们将得到谓词 p_j 的测试等价类的划分：

$\{\tilde{L}_{1j}p_j\cap\tilde{L}_{2j}p_j\cap\cdots\cap\tilde{L}_{nj}p_j\ |\ \tilde{L}_{ij}=L_{ij}$或者 $\tilde{L}_{ij}=\bar{L}_{ij},i=1,2,\cdots,n\}$

考虑谓词集合 P，我们可以证明环境自动机 $\mathscr{E}$ 的测试等价类为：

$\{\bigcap_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{r}\tilde{L}_{ij}p_j)\ |\ \tilde{L}_{ij}=L_{ij}$或 $\tilde{L}_{ij}=\bar{L}_{ij}$，且对同一个 i，～的取法相同$\}$

由于对同一个 i，符号～的取法相同，它们是 $L_{i1}p_1\cup L_{i2}p_2\cup\cdots\cup L_{ir}p_r$ 或者是 $\bar{L}_{i1}p_1\cup\bar{L}_{i2}p_2\cup\cdots\cup\bar{L}_{ir}p_r$。而交项恰有 n 个，因此我们又可以用 n 位二进制数对这些测试等价类编码，编码的第 i 位是 1，当且仅当第 i 个交项是 $L_{i1}p_1\cup L_{i2}p_2\cup\cdots\cup L_{ir}p_r$，否则是 0。

现在我们来证明上面的结论。

首先上面的那些测试等价类构成了$\mathscr{E}$的所有测试的划

（下转第 21 页）

维普资讯 http://www.cqvip.com

从而 N 也是结构有界的。同理可证：

定理 3.4 设 N_1,N_2 是两个守恒的 M-Petri 网，若 $P_1 \cap P_2 = \varnothing$，则 $N = N_1 \underline{\cup}_T N_2$ 是守恒的 M-Petri 网。

推论 3.1 设 Y_i 是 M-Petri 网 $N_i(i=1,2)$的 S-不变量，若 $P_1 \cap P_2 = \varnothing$，则 $m(m=|P_1|+|P_2|)$维向量 $Y=Y_1+Y_2$(P_2 中库所在 Y_1 中对应分量为 0，P_1 中库所在 P_2 中对应分量为 0)是 M-Petri 网 $N=N_1 \underline{\cup}_P N_2$ 的 S-不变量。

推论 3.2 设 X_i 是 M-Petri 网 $N_i(i=1,2)$的 T-不变量，若 $P_1 \cap P_2 = \varnothing$，则 n_1n_2 维向量 $X=X_1 \otimes X_2$ 是 M-Petri 网 $N=N_1 \underline{\cup}_T N_2$ 的 T-不变量。

4 举例

图 1 中 N_1,N_2 是相容的 M-Petri 网，由定理 2.2 和定理 3.2 知 I 型组合并网 $N_1 \underline{\cup} N_2$ 和 II 型组合并网 $N_1 \underline{\underline{\cup}} N_2$ 是相容的 M-Petri 网。

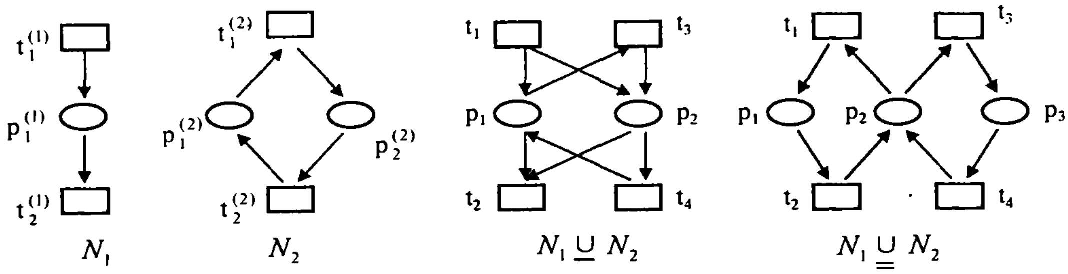

图 1

结束语 本文给出的两种 M-Petri 网运算：M-Petri 网的 I 型广义组合并运算和 II 型广义组合并运算，分别是在库所集、变迁集上取笛积，讨论了保持网的结构性质的条件。讨论网运算的性质及如何降低条件使已有网运算还能很好地保持网的性质仍是进一步讨论的内容。

参 考 文 献

1 Jiang Changjun, Wu Zhehui. Net operations. Journal of Computer Science and Technology, 1992, 7(4): 333～344

2 蒋昌俊. Petri 网的广义笛积运算. 自动化学报, 1993, 19(6): 745～748

3 王培良, 蒋昌俊. Petri 网的并运算. 西北大学学报, 1997, 27(增刊): 111～114

4 杜玉越, 李孝忠, 等. 一种组合 Petri 网的性能分析. 西北大学学报, 1997, 27(增刊): 126～129

5 李孝忠, 杜玉越. 两类组合 Petri 网与性能分析. 软件学报, 1998, 9(8): 619～621

6 李孝忠, 杜玉越. Petri 网的笛加运算及性质研究. 小型微型计算机系统, 1998, 19(9): 50～54

7 李孝忠, 王文德, 杜玉越. Petri 网的组合并运算及性质. 计算机科学, 2000, 27(8): 59～62

8 左凤朝, 王文德. M-Petri 网及性能分析. 计算机科学, 2001, 28(5): 120～122

9 杜玉越, 李孝忠, 曹德范. 同步合成网的结构性质分析. 东南大学学报, 1999, 29(5): 26～30

10 Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(4): 541～580

(上接第 23 页)

分。这是由于任意一个测试 $t=ap_i$，在任意一个状态 q_i 下，都会有一个值是 true 或 false。是 true 时，对应于 n 位二进制数编码的第 i 位为 1，否则为 0。这样这个测试 t 就在对应于这个 n 位二进制数编码的测试类中，其次，任意两个不同的测试类，它们对应的二进制编码也不同，至少它们在某一个第 i 位取值不同，一个为 1，一个为 0。于是它们将是 $L_{i1}p_1 \cup L_{i2}p_2 \cup \cdots \cup L_{ir}p_r$ 和 $\bar{L}_{i1}p_1 \cup \bar{L}_{i2}p_2 \cup \cdots \cup \bar{L}_{ir}p_r$。在我们把这些测试类求交时，这两项也要作交运算，而它们的交为 ϕ。所以两个不同的测试类的交是 ϕ。

其次，我们证明这些测试类确实为测试等价类。

如果 $t_1 \equiv t_2$，设 $t_1=a_1p_k$，$t_2=a_2p_l$，对于任意 $q_i \in Q$，$q_ia_1p_k = q_ia_2p_l$，所以它们对所有状态测试的结果，对应于同一个二进制编码，因而在上面的同一个测试类中。反之，对于同一个测试类中的两个测试 $t_1=a_1p_k$，$t_2=a_2p_l$，由于它们对所有状态的测试对应于同一个二进制编码，因此，$q_ia_1p_k=q_ia_2p_l$，即 $t_1 \equiv t_2$。

这样，我们得到了环境自动机 $\mathscr{E}$ 的测试等价类的结构。

定理 3 环境自动机 $\mathscr{E}$ 的测试等价类为：

$\{\bigcap_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{r}\bar{L}_{ij}p_j) \mid$ 其中交项为 $\bigcup_{j=1}^{r}L_{ij}p_j$ 或 $\bigcup_{j=1}^{r}\bar{L}_{ij}p_j, i=1,2,\cdots,n\}$

按照文[4]，每一个 L_{ij} 或 $\bar{L}_{ij}$ 都是可以有正则表达式的，因而 $\mathscr{E}$ 的测试等价类也可以有正则表达式。

参 考 文 献

1 Rivest R L, Schapire R E. Diversity-Based Inference of Finite Automata. Journal of the Association for Computing Machinery, 1994, 41(3)

2 Angluin D. Learning Regular Sets from Queries and Counterexamples. Inf. Computation, 75, Nov. 87～106

3 沈虹. 计算理论基础. 陕西人民出版社

4 沈虹. 有限自动机的正则表达式的范式. 西安工业学院学报, 2001, 21(3)