

带微调参量的正则化方法及其在降质图像恢复问题中的应用^{*}

A Regularization Method with Spinning Function Parameters and its Application in Restoring Degraded Image

曾三友² 康立山¹ 董文永¹(武汉大学软件工程国家重点实验室 武汉430072)¹(株洲工学院计算机系 株洲412008)²

Abstract Introduce spinning function parameters in regularized solution definition; consequently regularization operators can keep more message from outside so that we can choose regularization operator which approaches true solution as well as possible. Based on the concept of spinning function parameters we discuss corresponding regularization method. By the instruction of the method in restoring degraded image, we work out a model of implicit form of regularization operators which can carry some more message. When the spinning function parameters are constant functions there is quick algorithm to find the regularized solution and we give an explicit form of the regularized solution. The regularization method with spinning function parameters will have theoretical signification in solving other inverse problems.

Keywords Regularization method, Image restoration, Sobolev space

1 引言

降质图像恢复问题就是图像处理领域里一类反问题。降质图像恢复中的解通常是病态的,利用正则化方法恢复图像取得了较好效果^[1~3]。然而,传统的正则化方法中正则逆算子只含正则化参数,它不能充分地融合其它信息,得到的正则解逼近真解的效果不很理想。为了取得好的恢复效果,各种各样融合其它信息的方法提出来了,以使正则化方法的恢复效果更好。例如,使用局部正则化参数,图像的边缘和纹理区域使用较小的正则化参数,平滑的区域使用较大的正则化参数,局部方差较小的区域正则化参数较大,局部方差较大的区域正则化参数较小,产生自适应正则化参数的正则化方法^[4~6]。人们根据图像的能量、导数的二次平均、曲率的二次平均等设计出各种各样的正则化算子,不同的正则化算子将导致不同的恢复效果,自适应选取正则化算子的正则化方法也已出现^[6~8]。本文提出微调参量概念,使正则逆算子融合更多信息,以便从更多角度选择正则逆算子,得到尽可能接近精确解的正则解,实际上是对各种正则化方法在理论上的概括。在此基础上,结合降质图像的恢复问题讨论了与之相应的正则化方法,避免盲目地选取算子和参数。微调参量概念不仅用来指导解决降质图像的恢复问题,而且对解决一般的反问题有理论指导意义。

2 有关的理论和方法

2.1 正则化方法^[9,10]

设线性算子 A 映 $f \in U$ 为 $g \in B$, U 与 B 为某类赋范空间,记

$$Af = g, f \in U, g \in B \quad (2.1.1)$$

设式(2.1.1)右端为给定元素 $g_T \in B$ 时的真解为 f_T ,在经典意义下求解(2.1.1)

$$f_T = A^{-1}g_T \quad (2.1.2)$$

但这种解可能是病态不适定的。

定义2.1.1 设算子 $R(g, \mu)$ 映 g 成 f , 且依赖于参数 μ ,

并且具有如下性质:

(1) 存在正数 $\delta_1 > 0$, 使得对于任意 $\mu > 0$, 以及 g_T 的 δ ($0 < \delta \leq \delta_1$) 邻域中的 g , 即满足 $\|g_T - g\|_B \leq \delta$, $0 < \delta \leq \delta_1$ 的 g , 算子 R 有定义。

(2) 若对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta \in (0, \delta_1)$ 及依赖于 δ 的参数 $\mu = \mu(\delta)$, 使得算子 $R(g, \mu(\delta))$ 映 g_T 的 δ 邻域到 f_T 的 ϵ 邻域, 即:

$$R(g, \mu(\delta)) = f_\epsilon, \|f_\epsilon - f_T\|_U \leq \epsilon \quad (2.1.3)$$

则称 $R(g, \mu)$ 为方程(2.4.1)中 A 的正则逆算子, f_ϵ 称为(2.4.1)的正则解, μ 称为正则化参数。

定义2.1.2 设非负连续泛函 $\Omega(f)$ 定义在 U 内的处处稠密子集 U_1 上, 称 $\Omega(f)$ 为镇定泛函, 如果满足如下性质: (1) $f_T \in U_1$; (2) 对任意 $\delta > 0$, 集合 $U_{\delta, \epsilon} = \{f | f \in U_1, \Omega(f) \leq \delta\}$ 是 U_1 中的自列紧集。

定义2.1.3 对于定义2.1.2中定义的镇定泛函 $\Omega(f)$, 称 $\Omega(f)$ 为拟单调泛函, 如果在 U_1 中任何取一点 $f_0 \in U_{\min}$, 其中 $U_{\min} = \{f | \Omega(f) = \inf_{f \in U_1} \Omega(f)\}$, 而且在 f_0 的任意邻域内, 总存在 f_1 , 使 $\Omega(f_1) < \Omega(f_0)$ 。

定理2.1.1 若 $\Omega(f)$ 为拟单调泛函, 则使下列泛函:

$$\Phi(f, g; \mu) = \|Af - g\|_B^2 + \mu\Omega(f)$$

$$\text{st. } \|Af - g\|_B = \delta$$

取极小的 f_ϵ 是方程(2.1.1)的正则解。这里, $\mu = \mu(\delta)$

2.2 索伯列夫空间及嵌入定理^[11]

定义2.2.1 设 $D \subset R^n$ 是一个开集, m 是非负整数, $1 \leq p < \infty$, 称集合:

$$W^{m,p}(D) = \{f \in L^p(D) | \partial^\alpha f(x) \in L^p(D), |\alpha| \leq m\},$$

按模

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f(x)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.1)$$

构成的空间为索伯列夫空间, 记作 $W^{m,p}(D)$ 。

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, 以及

^{*} 自然科学基金资助(60073043, 70071042)。曾三友 博士生, 研究方向为图像处理, 演化计算。

$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) L^p(D)$ 是按模 $\|f\|_p = (\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ 构成的 p 次可积空间。

嵌入定理 若 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个可扩张的区域, 当 $m \leq \frac{n}{p}$ ($\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$) 时, $W^{m,p}(D)$ 连续地嵌入 $L^q(D)$; 当 $m > \frac{n}{p}$ 时, $W^{m,p}(D)$ 连续地嵌入 $C(\bar{D})$, 且以上嵌入是紧的。记

$$\|f\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \int_D q_\alpha(x) |\partial^\alpha f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$q_\alpha(x)$ 是正的可积函数。

容易证明 $\|f\|_{m,p}$ 是模, 且与 $\|f\|_{m,p}$ 是等价模。

3 带微调参数的正则化方法

为了使算子 $R(g, \mu)$ 能融合更多的信息, 我们把 $R(g, \mu)$ 拓广。假定方程 (2.1.1) 存在唯一的经典解 f_T , 满足: $Af_T = g_T$ 。

对定义 (2.1.1) 做如下的拓广:

定义 3.1 设带参量算子 $R(g, q, \mu)$ 映 g 成 f , 这里 $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, $q_i \in Q \subset U$, ($i=1, 2, \dots, m$); 且 $R(g, q, \mu)$ 依赖于参数 μ 和 q , 并且具有如下性质:

(1) 存在正数 $\delta_1 > 0$, 使得对于任意 $\mu > 0$ 和 $q_i \in Q$, 以及 g_T 的 δ ($\delta \leq \delta_1$) 邻域, 即满足 $\|g_T - g\|_B \leq \delta$, $0 < \delta \leq \delta_1$ 中的 g , 算子 R 有定义。

(2) 若对任意的 $\epsilon > 0$ 和任意的 $q \in Q$, 都存在 $\delta \in (0, \delta_1)$ 及依赖于 δ 和 q 的参数 $\mu = \mu(\delta, q)$, 使得算子 $R(g, q, \mu(\delta, q))$ 映 g_T 的 δ 邻域到 f_T 的 ϵ 邻域, 即

$$R(g, q, \mu(\delta, q)) = f_{\delta,q}, \|f_{\delta,q} - f_T\|_U \leq \epsilon \quad (3.1.1)$$

则称 $R(g, q, \mu)$ 为方程 (2.1.1) 中 A 的正则逆算子, $f_{\delta,q}$ 称为 (2.4.1) 的正则解, μ 称为正则化参数, q 为微调参量, Q 为微调空间。

定理 3.1 若对任意的 $q \in Q$, $\Omega(f, q)$ 为拟单调泛函, 则使下列泛函:

$$\Phi(f, g_\delta; q, \mu) = \|Af - g_\delta\|_B^2 + \mu \Omega(f, q) \quad (3.1.2)$$

st. $\|Af - g_\delta\|_B = \delta$

取极小的 $f_{\delta,q}$ 是方程 (2.1.1) 的正则解。这里 $\mu = \mu(\delta, q)$

证明: 对于给定的 $q \in Q$, $\Omega(f, q)$ 满足定理 2.1.1 的条件, 利用定理 2.1.1 结论, 使泛函 $\Phi(f, g_\delta; q, \mu)$ 取极小的 $f_{\delta,q}$ 是方程 (2.1.1) 的正则解。

在给定 $q \in Q$ 的前提下, 和文 [9] 一样进行类似讨论, 得

定理 3.2 对于给定的 $q \in Q$, 正则解 $f_{\delta,q}$ 对算子 A 具有连续依赖性。

定理 3.3 记偏差 $\rho(f) = \|Af - g\|_B$, 记 (3.1.2) 的极小解 $f_{\delta,q}$ 为 $f(\mu, q)$, 则, 对于给定的 $q \in Q$, $\rho(f(\mu, q))$ 是正则参数 μ 单调不减函数。

给定 $q \in Q$ 后, 就可以利用已有的方法确定正则化参数 [9, 10]。

4 带微调参数的正则化方法在降质图像恢复问题中的应用

在许多情况下图像降质过程可以用下面的线性空不变模型来描述。

$$g(x, y) = h(x, y) * f^0(x, y) + n(x, y) \quad (4.1)$$

其中 $g(x, y)$, $f^0(x, y)$, $n(x, y)$ 分别为降质图像、原图像、噪声。 $h(x, y)$ 为模糊函数。

定理 4.1 设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 属于索伯列夫空间 $U = W^{2,2}(D)$, 则使下列泛函:

$$\Phi(f, g; \mu, q) = \|h(x, y) * f(x, y) - g(x, y)\|_2^2 + \mu \|f(x, y)\|_{2,2}^2 \quad (4.2)$$

st. $\|h(x, y) * f(x, y) - g(x, y)\|_2 = \delta$

取极小的 $f_{\delta,q}(x, y)$ 是方程 $h(x, y) * f(x, y) = g(x, y)$ 的正则解。其中 $\|f\|_{2,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_D q_\alpha(x) |\partial^\alpha f(x)|^2 dx$ 或者为与模 (2.2.1) 等价的任何模。

证明: 对于给定的 $q \in Q$, 记

$$\Omega(f, q) = \|f\|_{2,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_D q_\alpha(x) |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \quad (4.3)$$

$$U_{mn,q} = \{f | \Omega(f, q) = 0\}$$

根据嵌入定理 $W^{2,2}(D)$ 紧嵌入 $L^2(D)$, 因此, $W^{2,2}(D)$ 中的有界集必是 $L^2(D)$ 中的列紧集, 知 $\Omega(f, q)$ 是镇定泛函。下面证明 $\Omega(f, q)$ 是拟单调的, 任取 $f_0 \in U_{mn,q}$, 在 f_0 的任意邻域: $O(f_0, \epsilon) = \{f | \|f - f_0\|_2 \leq \epsilon\}$ 里, 取 $f_1 = f_0 - \frac{\epsilon}{\|f_0\|_2} f_0$ 代入式 (4.3):

$$\begin{aligned} \Omega(f_1, q) &= \|f_1\|_{2,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_D q_\alpha(x) |\partial^\alpha f_1(x)|^2 dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_D q_\alpha(x) |\partial^\alpha (f_0 - \frac{\epsilon}{\|f_0\|_2} f_0)|^2 dx \\ &= (1 - \frac{\epsilon}{\|f_0\|_2})^2 \Omega(f_0, q) < \Omega(f_0, q) \end{aligned}$$

所以 $\Omega(f, q)$ 是拟单调的, 根据定理 3.1, $f_{\delta,q}(x, y)$ 是正则的, 定理得证。

对一般的 $q_\alpha(x)$, 求解正则解 $f_{\delta,q}(x, y)$ 的计算量很大。现在, 取 $q_\alpha(x)$ 为非负常数, 利用 Rayleigh 定理 [7], (4.2) 式可写成

$$\begin{aligned} \Phi(f, g; \mu, q) &= \|\hat{h}\hat{f} - \hat{g}\|_2^2 + \mu(q_0 + q_1 u^2 + q_2 v^2 + q_{11} u^4 + q_{12} u^2 v^2 + q_{22} v^4) \|\hat{f}\|_2^2 \quad (4.4) \end{aligned}$$

求式 (4.4) 的极小, 可求出 $\hat{f}_{\delta,q}(u, v; \mu)$

$$\hat{f}_{\delta,q}(u, v; \mu) = \frac{\hat{h}^*(u, v) \hat{g}(u, v)}{|\hat{h}(u, v)|^2 + \mu(q_0 + q_1 u^2 + q_2 v^2 + q_{11} u^4 + q_{12} u^2 v^2 + q_{22} v^4)} \quad (4.5)$$

这里 $\hat{f}_{\delta,q}$, $\hat{h}$, $\hat{g}$ 分别为 $f_{\delta,q}$, h , g 的傅里叶变换。

对 (4.5) 式两边取傅里叶逆变换, 得

$$\begin{aligned} f_{\delta,q}(x, y; \mu) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{h}^*(u, v) \hat{g}(u, v)}{|\hat{h}(u, v)|^2 + \mu(q_0 + q_1 u^2 + q_2 v^2 + q_{11} u^4 + q_{12} u^2 v^2 + q_{22} v^4)} e^{2\pi i (ux + vy)} du dv \quad (4.6) \end{aligned}$$

5 微调参量确定建议

确定微调参量, 必须根据其它的信息, 这个信息应能识别微调参量的优劣, 通过优化算法选取最优微调参量, 文 [8] 是一个尝试; 也可使用交互法, 通过决策者与机器对话选取合适微调参量; 或者在实验中发现解决一类问题的合适微调参量, 选取相应的正则化算子, 应用于解决实际问题。

结论

(1) 提出微调参量概念, 使正则逆算子融合更多信息, 以便从更多角度选择正则逆算子, 得到尽可能接近精确解的正则解。

(2) 基于微调参量概念, 有与之相应的正则化方法。

(下转第 32 页)

uxdevices.com 曾对嵌入式开发人员抽样调查了如下十个问题:使用 Linux 的原因,目前拥有嵌入式 Linux 的情况,计划何时开发项目,应用领域,计划使用的芯片类型,计划使用 Linux 的类型,计划使用何种版本的 Linux,主要关注操作系统哪方面的特性,是否考虑有偿技术支持和服务,和未来两年内计划使用何种操作系统。答复令 Linux 社团异常振奋,尤其是未来两年内计划使用的操作系统回答用 Linux 的有 49%,而回答用 Windows(包括 CE)的只有 19%,人心向背由此可见。

四、小结

Linux 的强大生命力来自于它的开放性和对新技术的包容能力。从 Linux 发展过程可以看出,它走的是一条彻底开放的道路,虽然有可能带来一些副作用,如发行版本繁多等弊病;但从本质上看,开放性正是 Linux 强大生命力所之在。它的开放性不仅表现在遵循标准,提供公开的接口,而且遵循 GPL 规则,连源码都是公开的。这样一条既合作又竞争的发展道路,激发起许多厂商的创造热情,并有利于技术和资源的共享,Linux 发行厂商多年在研究开发上的巨额投资,使得 Linux 技术和产品能不断创新,而不受哪家具体厂商的控制,给用户以选择的自由,从而为用户带来长远的好处。

此外,Linux 对新技术具有巨大的包容能力。因为 Linux 早就是一种真正 32 位的操作系统,64 位的 Linux 系统也已问世,其计算能力及包容新技术的能力非常大,而且 Linux 还为软件人员提供了强大的开发环境。这些都为层出不穷的新技术提供了良好的生长和栖息环境。

因此,Linux 作为一种开放的、不断革新和发展的操作系统技术,具有极强的生命力。特别是它因 Internet 而生,Internet 的爆炸性发展、以网络为中心的计算机模式如电子商务被迅速接受和普及,为 Linux 提供了更巨大的机会。

根据以上事实和前面的分析比较,我们可以得出如下结论:

1. Linux 是企业 and 部门级服务器的首选平台,目前已在许多大中型企业作为企业级和部门级主要平台使用。

2. Windows 凭借微软在桌面领域的强大优势,成为普通的首选平台,其服务器版 NT 正在向部门级甚至企业级应用平台前进。目前已在小型部门级应用中占有重要地位,但很少

有企业敢冒风险将 NT 作为主要的企业级平台使用。

3. 目前服务器操作系统基本上为 3 方所占,Netware, Linux/Unix 和 NT。从发展态势上看,NT 正在迅速挤占 Netware 的份额。在 2000 年以后将会逐步形成 Unix/Linux 与 NT 二方主宰的态势。

任何一家独霸天下的局面不会出现,NT 也不例外,理由是:世界是多样化的,不能设想有任何一种产品能满足所有用户的需求。显而易见,你不能要求全世界的人穿一样的衣服,说同一种语言,也不能要求他们使用同一种计算机和操作系统。

独霸垄断对经济和技术的发展都是不利的,也不符合广大用户的根本利益。任何想实现垄断的企图最终都会以失败而告终。计算机发展的历史也充分证明了这一点。所谓 Windows NT 将一统天下的预言早已被事实粉碎。

4. 微软凭借 Windows 在台式机层面的垄断地位正在遇到强有力的挑战。不仅是一批公司正在以 NC、JAVA、Internet 以及“Network-centric”“Service-centric”计算模式等为武器向微软垄断地位发起挑战。而且美国司法部对微软一分为二的判决也表明微软的垄断受到了政府、媒体、用户的一致反对。Linux 正在桌面系统崛起。只要 Linux 在桌面公共应用系统的技术开发及市场上作出卓越成效的工作,那么将来的桌面系统 Linux 将与 Windows 平分秋色。当然在相当长一段时间里,Windows 的份额将大于 Linux。

5. 在嵌入式系统层面,由于 Linux 的众多优点,特别是其源码开放、遵循标准并且与互联网络的天生紧密关系,使它大大强于竞争者,包括微软的 WinCE, Linux 将是嵌入式系统最好的开发平台和主导的应用操作系统。

总而言之,在中高端服务器上, Linux/Unix 将占优势;在以 PC 服务器为代表的低端服务器以及桌面机系统上 Windows(包括 NT)占相对优势;在各种嵌入式系统中 Linux 将比 WinCE 更具优势。

参考文献

- 1 孙玉芳,“集市模式”是一种新的软件工程方法吗?, 计算机科学, 2002, 29(5)
- 2 孙玉芳, Linux 真给国产操作系统发展提供了机遇吗?, 计算机科学, 2002, 29(7)
- 3 Andrews H, Hunt B. Digital Image Restoration. Englewood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1977
- 4 Bertero M, Boccacci P. Introduction to Inverse Problems in Image. London: Institute of Physics Publishing, 1998
- 5 Tekalp A, Kaufman H, Woods J. Edge-adaptive Kalman Filtering for Image Restoration with Ringing Suppression. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1989, 37(6): 892~899
- 6 Qian W, Clarke L P. Wavelet-based neural network with fuzzy-logic adaptivity for nuclear image restoration. Proc. IEEE, 1996, 84(10): 1458~1473
- 7 Wong Hau-San, Ling Guan. Application of Evolutionary Programming to Adaptive Regularization in Image Restoration. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2000, 4(4): 309~326
- 8 Castleman K R. digital Image Processing(影映版). 北京:清华大学出版社, 1998
- 9 曾三友, 康立山, 丁立新. 利用演化算法自适应选择正则算子. 已投计算机研究与发展
- 10 黄光远, 刘小军. 数学物理反问题. 济南: 山东科学技术出版社, 1994
- 11 Charles W G. Inverse Problems in the Mathematical Sciences. Wiesbaden: Vieweg, 1993
- 12 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义. 北京: 北京大学出版社, 1987

(上接第 126 页)

(3) 带微调参量的正则化方法可应用于降质图像的恢复问题, 在此方法的指导下, 构造一个能融合一些信息的隐含形式的正则逆算子模型, 在带微调参量取常量的情况下, 求解正则解有快速算法, 并给出正则解的显式形式。

(4) 微调参量概念不仅用来指导解决降质图像的恢复问题, 理论上也需要这种抽象, 有了这个开端, 进一步的研究就可以有的放矢地展开, 它将对解决一般的反问题具有理论指导意义。

(5) 微调参量过多过细, 会导致计算量很大, 传统的快速算法难以使用; 微调参量过少过粗, 正则化算子难以充分融合众多信息, 正则解逼近真解程度不够; 虽然, 提出了一些确定微调参量的建议, 但没有提供一般的方法确定微调参量, 这些问题有待于进一步研究。

参考文献

- 1 Katsaggelos A K. Digital Image Restoration. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991