关于 Rough 陪集和 Rough 不变子群的进一步讨论

Further Study about Rough Coset and Rough Invariant Subgroup

刘财辉　王隆鑫　王黔英

(南昌大学数理学院　南昌330047)

Abstract On the paper [1], the authors have introduced the concepts of Rough Coset and Rough Invariant Subgroup and got some important conclusions. In this paper further study about Rough Coset and Invariant Subgroup has been done based on the paper [1], such as the disjunction of a Rough group by using right cosets or left cosets, the concept of double coset has been introduced and some conclusions related to Rough Invariant Subgroup are proved, etc.

Keywords Rough coset, Rough double coset, Rough Invariant subgroup

1. 引言

已经有许多人做了把 Rough 集理论和代数理论相结合起来进行研究的工作。比如在文[1]中，作者利用相容关系引入了 Rough 陪集和 Rough 不变子群的概念并由此导出了一些相应的结论。本文在文[1]的基础上对 Rough 陪集和 Rough 不变子群做了进一步的讨论和分析工作，导出了 Rough 陪集的一些重要性质以及利用 Rough 陪集对一个 Rough 群进行了划分并引入了 Rough 双陪集的概念及相应的性质。此外，还讨论了同态和 Rough 不变子群的一些相关问题。

2. Rough 群的 Rough 陪集分解

定义1[1]　由相容关系"～"定义的 G 的相容类叫做 Rough 子群 H 的 Rough 右陪集。包含 a 的 Rough 右陪集用符号 H＊a 来表示，即：

$H*a=\{h*a|h\in H,a\in G,h*a\in G\}\cup\{a\}$

类似地我们可以得到 Rough 左陪集的定义，即：

$a*H=\{a*h|h\in H,a\in G,a*h\in G\}\cup\{a\}$。

我们知道利用一个群 G 的一个子群 H 可以对群 G 做一个分类，也就是说一个群 G 可以利用它的子群 H 的陪集来进行划分。为了进行这一项工作下面我们就在文[1]的基础上，给出关于 Rough 左、右陪集的一些重要性质，为了简单起见我们把 H＊a 简写为 Ha，a＊H 写为 aH：

(1)如果 $h\in H$，那么 $hH=H=Hh$；

(2)$a\in aH\cap Ha$；

(3)$Ha=Hb$ 当且仅当 $ab^{-1}\in H$

　$aH=bH$ 当且仅当 $b^{-1}a\in H$；

(4)如果 $b\in Ha$，那么 $Hb=Ha$

　如果 $b\in aH$，那么 $bH=aH$；

(5)如果 $Ha\cap Hb\neq\varnothing$ 那么 $Ha=Hb$；

(6)$|Ha|=|H|=|aH|$，$\forall a\in G$。

由上面的性质(2)和(5)我们可以得到如下的结论：

定理1　Rough 群 G 可分解成 Rough 子群 H 的两两不相交的 Rough 右(左)陪集的并。

证明：$\forall a\in G$，由性质(2)有 $a\in Ha$

∵运算是封闭的

$\therefore Ha\subseteq G$

$\therefore \bigcup_{a\in G} Ha\subseteq G$

反过来，$\forall a\in G$，有 $a\in Ha$，$\therefore G\subseteq \bigcup_{a\in G} Ha$

$\therefore G=\bigcup_{a\in G} Ha$

又由性质(5)可知两个 Rough 右陪集要么相等，要么不相交

∴在 $\bigcup_{a\in G} Ha$ 中去掉重复项就得到群 G 的两两不相交的 Rough 右陪集并的分解。

同理可证 Rough 左陪集的情况。

3. Rough 双陪集

为了方便起见我们引入了下面的符号：

设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 为群的任意子集合，令 $A_1A_2\cdots A_n=\{a_1a_2\cdots a_n|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$。如果 $A_1,\cdots A_n$ 中的某一个为一个元的集合，譬如说 $A_2=\{a\}$，那么 $A_1\{a\}A_3\cdots A_n$ 就直接写成 $A_1aA_3\cdots A_n$。根据此约定显然下列等式成立：

$x^{-1}Ax=\{x^{-1}ax|a\in A\}$；

$AB=\{ab|a\in A,b\in B\}$；

$AxB=\{axb|a\in A,b\in B\}$

$Ax1=\{ax|a\in A\}$；

$lxB=\{xb|b\in b\}$。

其中 $x\in G$

定义2　设 A，B 是 Rough 群 G 的 Rough 子群，那么集合 AxB(其中 $x\in G$)称为 Rough 群 G 的 Rough 双陪集。

很显然，当 A＝1时 Rough 双陪集 AxB 就等于

B 的 Rough 左陪集 xB，当 B＝1时，Rough 双陪集 AxB 就等于 A 的 Rough 右陪集 Ax。

当 A，B 为有限时，容易看出：

$$AxB = a_1xB \cup a_2xB \cup \cdots \cup a_txB = Axb_1 \cup Axb_2 \cup \cdots \cup Axb_n \qquad (1)$$

对于某些 $a_1, \cdots, a_t \in A$ 和某些 $b_1, \cdots, b_n \in B$

定理2 两个双陪集 AxB，AyB 要么相等，要么不相交。

假设 A，B 是 Rough 群 G 的任意 Rough 子群那么由于$1 \in A \cap B$，所以对于任意 $a \in G$ 有 AaB。于是

$$G = \bigcup_{a \in G} AaB \qquad (2)$$

在(2)中去掉重复项，我们得到 Rough 群 G 的两两不相交的 Rough 双陪集并的分解。

4. 同态与 Rough 不变子群

定义3[1] 一个 Rough 群 G 的 Rough 子群 N 叫做一个 Rough 不变子群，假如对于 G 的每一个元 a 来说都有 a * N＝N * a。一个 Rough 不变子群的 Rough 左、右陪集相同，统称为 Rough 陪集。

定理3 一个 Rough 群 G 的一个 Rough 不变子群 N 的 Rough 陪集对于乘法$(xN)(yN)=(xy)N$(其中 $x, y \in$ G)来说作成一个 Rough 群。

证明：(1)很显然，Rough 陪集关于乘法运算是封闭的；

(2)$\forall\ x, y, z \in G$，有$(xNyN)zN = [(xy)N]zN = (xyz)N$

$xN(yNzN) = xN[(yz)N] = (xyz)N$

所以$(xNyN)zN = xN(yNzN)$，即满足结合律；

(3)$\because eNxN = (ex)N = xN$

$\therefore$至少存在一个左单位元 e

(4)$\because x^{-1}NxN = (x^{-1}x)N = eN$

$\therefore$每一个元至少存在一个左逆元

所以根据 Rough 群的定义 Rough 陪集是一 Rough 群。

定义4 一个 Rough 群 G 的一个 Rough 不变子群 N 的 Rough 陪集所作成的群叫做一个 Rough 商群，记为 G/N。

我们知道由群的一个子群可以推测整个群的性质，假如我们有一个不变子群 N，那么就同时有两个群可以供我们利用，一个是 N 本身，另一个是商群。下面引出几个重要的关系，通过这几个关系我们可以看到 Rough 不变子群和 Rough 商群的重要意义。

定理4 一个 Rough 群 G 同它的每一个 Rough 商群 G/N 同态。

证明：规定一个法则 $a \to aN (a \in G)$

显然根据这个法则 G/N 中的每一个元 aN 至少是 G 中元 a 的象

所以法则是 G 到 G/N 的一个满射；

对于 G 的任意两个元 a 和 b，$a \to aN, b \to bN$

显然有 $ab \to abN = (aN)(bN)$

所以这个法则是一个同态满射，也就是说 G 与 G/N 同态。

定义5 假定 Φ 是一个 Rough 群 G 到另一个 Rough 群 $\overline{G}$ 的一个同态满射，$\overline{G}$ 的单位元 $\bar{e}$ 在 Φ 之下的所有逆象所作成的 G 的子集叫做同态满射的核。

定理5[见文1定理4.2] Rough 群的 Rough 子群是 Rough 不变子群的充分必要条件是：

$\forall\ a \in G, n \in N, ana^{-1} \in N$

定理6 假定 G 和 $\overline{G}$ 是两个 Rough 群，并且 G 和 $\overline{G}$ 同态，那么这个同态满射的核 N 是 G 的一个 Rough 不变子群，并且 $G/N \cong \overline{G}$。

证明：用 Φ 表示给的同态满射

假定 a 和 b 是 N 的任意两个元，那么在 Φ 之下有 $a \to \bar{e}, b \to \bar{e}$ 则 $ab^{-1} \to \bar{e}\bar{e}^{-1} = \bar{e}$，也就是说 $a, b \in N \Rightarrow ab^{-1} \in N$，所以 N 是 G 的一个 Rough 子群；

假定 $n \in N, a \in G$ 而且在 Φ 之下 $a \to \bar{a}$，那么在 Φ 之下 $a \to \bar{a}, n \to \bar{e}$，则 $ana^{-1} \to \bar{a}\bar{e}\bar{a}^{-1} = \bar{e}$ 也就是说 $n \in N, a \in G \Rightarrow ana^{-1} \in N$，所以 N 是 G 的一个 Rough 不变子群；

现规定一个法则 $\Psi: aN \to \bar{a} = \Phi(a) (a \in G)$，我们说这是一个 G/N 与 $\overline{G}$ 间的同构映射，因为：

(1)$aN = bN \Rightarrow b^{-1}a \in N \Rightarrow \bar{b}^{-1}\bar{a} = \bar{e} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ 即在 Ψ 之下 G/N 的一个元素只有一个唯一的象

(2)给定 $\overline{G}$ 的一个任意元 $\bar{a}$，在 G 里至少有一个元 a 满足条件 $\Phi(a) = \bar{a}$ 由 Ψ 的定义：aN→给的 $\bar{a}$，这说明 Ψ 是 G/N 到 $\overline{G}$ 的满射

(3)$aN \neq bN \Rightarrow b^{-1}a \notin N \Rightarrow \bar{b}^{-1}\bar{a} \neq \bar{e} \Rightarrow \bar{a} \neq \bar{b}$

(4)在 Ψ 之下，$aNbN = abN \to \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$

这样 $G/N \cong \overline{G}$ 证毕

定理4告诉我们，一个 Rough 群 G 和它的每一个 Rough 商群同态，定理6告诉我们，G 只能和它的 Rough 商群同态。我们知道，G 与 $\overline{G}$ 同态时，$\overline{G}$ 的性质和 G 的性质并不完全一样，但定理6告诉我们，这时一定能找到 G 的一个 Rough 不变子群 N 使得 $\overline{G}$ 的性质和 Rough 商群 G/N 的完全一样。

参 考 文 献

1 韩素青，胡桂荣．粗糙陪集，粗糙不变子群．计算机科学，2001，28(5，专刊)
2 郭文彬．群类论．科学出版社
3 张禾瑞．近世代数基础(1978年修订本)．高等教育出版社
4 吴品三．近世代数．高等教育出版社
5 Pawlak Z. ROUGH SETS-Theoretical Aspect of Reasoning about Data. KluwerAcademic，1991