

基于图像压缩的最佳多小波基选择

The Choice of Best Multiwavelet Base in Image Compression

王梦哲 何甲兴 张淑婷
(吉林大学数学科学学院 长春130025)

Abstract In this paper, we analyze the effect of symmetry, approximation order and the energy compaction of the orthogonal multiwavelets and balanced multiwavelets to the image compression. Then we introduce one new criterion for choosing best multiwavelets based on the correlation among the lowest resolution subimage components. Because of the difference of the decomposition between multiwavelets and wavelets, the new criterion can represent the characteristics of best multiwavelets base accurately. The simulating experiments are given and prove the new criterion is effective.

Keywords Multiwavelets, Correlation, Image compression

一、引言

随着小波分析在图像处理中的广泛应用,人们发现单小波不能将光滑性、紧支性、对称性、正交性等性质完美地结合在一起,因此多小波引起了研究者的浓厚兴趣^[5]。

著名的 GHM^[1]多小波由 Geromino 等人用分形插值方法得到。CL^[4]多小波是从两尺度系数入手,得到紧支撑正交多小波。I. W. Selesnick 是从采样定理和两尺度关系的方程组中得到插值平衡多小波,如 Cardbal2^[3,6],指的就是2阶平衡插值多小波。面对各种多小波,在进行图像压缩以前,如果我们能选择最佳多小波,做出相应的编码,这样能大大提高我们的工作效率,所以很有必要寻找一种方法来衡量各种多小波的有效性。

经过多小波变换后,原图像的能量都集中于最低分辨率子图像,而对于 CL 这样的多小波而言,其最低分辨率子图像的绝大部分能量又进一步集中于它的第一个分量,面对这样的分解结果我们可以采用单小波零树编码进行处理。但是,对于大多数多小波来说,能量是分散的,例如 GHM, Cardbal2 等多小波,四个分量都有图像。本文主要讨论具有这种分解结构特点的多小波,这样的多小波必须采用矢量零树编码方法来充分利用各个分量图像之间的相关性。本文给出的评价方法能够很好地反映四个分量图像之间的相关性,从而有利于做出最佳多小波基的选择。

二、多小波性质分析

1. 对称性

由于多小波具有对称性(反对称性),可使滤波器具有线性相位,或至少具有广义线性相位,则可减少或消除重构图像在边缘处的失真。GHM 多小波

就是对称的,正交的,而且十分光滑。Cardbal2、Cardbal3、Cardbal4 都是不对称的,但小波函数 ψ_1, ψ_2 的形状非常相似,具有正交,插值,平衡性质。但是随着平衡阶的增加,并不能使之更加光滑。

2. 消失矩性质

定义1 $\Psi(t) = [\psi_1(t) L\psi_r(t)]$ 是一向量小波函数,如果称多小波 $\Psi(t)$ 具有 N 阶消失矩,则满足
$$\int_R \Psi(t) t^m dt = 0, m = 0, 1, \dots, N-1.$$

所有小波都有一阶消失阶,但是没有任何一种单小波同时满足正交性、短支撑性,同时消失矩还大于1。但在实际应用中,好的逼近要求至少能线性函数完全重构,即要二阶消失矩,GHM 多小波有二阶消失矩,CL 多小波则至少为2。消失矩越高,逼近效果越好,图像重构以后误差越小。如表1,例举了文章中所讨论的多小波消失矩情况。

3. 逼近性质

令 $\|f\|_2 = (\int_R |f(t)|^2 dt)^{1/2}, \|f\|_{m,2} = (\sum_{k=0}^m \|D^k f\|_2^2)^{1/2}$ 其中 D 是一种微分算子, $W_2^m(R)$ 表示一般的 Sobolev 空间,具有范数 $\|g\|_{m,2}$ 。设: $\Phi = (\phi_v)_{v=0}^{r-1}$, 令 $S = S(\phi)$ 表示 $\phi_v (v=0, 1, \dots, r-1)$ 的整平移张成的平移不变子空间,我们称 $\phi(t)$ 具有逼近阶 m, 如果

$$\min\{\|f-s\|, s \in S^h\} \leq \text{const} h^m \|f\|_{m,2}$$

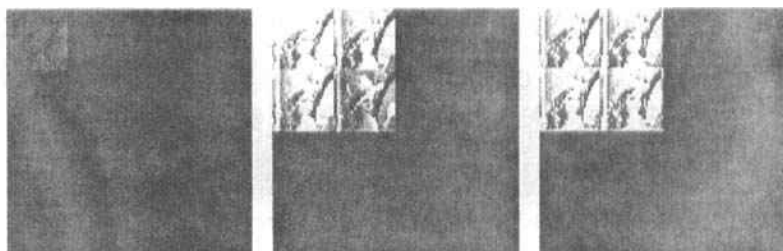
对 $\forall f \in W_2^m$, 其中 S^h 表示尺度空间, $S^h = \{s(g/h) | s \in S\}$ 。多小波的逼近阶普遍比单小波的高,在实际的运用中,逼近阶越高,逼近的效果越好,图像压缩重构回去后,相比原来的图像就越相似。根据以上的逼近阶定义方式,我们考察了几种正交多小波,平衡多小波的逼近阶情况,分析结果如表1。

4. 能量集中特性

定义2 能量公式: $ENERGY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(i, j)|$ 。

一幅 $N \times N$ 大小的图像经过1次多小波变换以后, 分解为4幅 $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ 大小不同分辨率、不同空间方

向的子图像, (LL, LH, HL, HH), 且每一幅子图像又可以进一步分解为4个 $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$ 大小的分量。Lena5-12 $\times 512$ 图像进行一次多小波分解的结果如图1所示。



(a)CL 多小波

(b)GHM 多小波

(c)Cardbal4多小波

图1 Lena 图像一次多小波分解的结果

经过不同的多小波变换, 最后得到的 LL 子图像的4个分量图各不相同。因为能量汇集能力越强的多小波, 更加有利于图像的编码, 提高压缩比的可能性就越大。

如表1, 分别给出了各种多小波在进行一次 Lenna512 $\times 512$ 图像分解以后, LL 子图像占图像总能量的百分比。由于多小波不同于单小波, 要求输入的是矢量图像, 前面必须有一个预处理, 后面有一个后处理。所以简单的分解重构变为:

预处理 $\rightarrow$ 分解 $\rightarrow$ 重构 $\rightarrow$ 后处理

不同的预处理方法将对能量的集中特性产生重大的影响。同时, 边界处理的方法不同, 如采用对称延拓和周期延拓造成能量损失也不一样。本文全都采用周期延拓, CL 多小波的能量主要集中在第一分量上, 图1(a)就可以相当于单小波分解两次来处理。图1(b), (c)的情况, 就是绝大多数多小波分解的情况, 我们可以用矢量多小波零树编码来处理。

5. 分量图像相关性

通过观察图1(b)、(c), 我们发现低频部分四个分量图像有很强的相关性, 但是对于不同的多小波, 经过一次多小波分解以后, 四个分量图像表现的相关性强弱不同。根据这种相关性, 从统计的角度, 我们提出一种新的最佳多小波选择标准, 分量图像相关系数法。

定义3 设 $U(i, j), V(i, j)$ 分别表示两个 $N \times N$ 的图像, $E(U), E(V)$ 分别表示两个图像的均值, 令 $U' = U - E(U), V' = V - E(V), C_{UV} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} U' \times V', C_{UU} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} U' \times U', C_{VV} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} V' \times V'$, 则两图像的相关系数为:

$$coef = \frac{C_{UV}}{\sqrt{C_{VV} \times C_{UU}}}$$

当两幅图像完全一样时, $|coef|$ 的值为1。 $|coef|$ 的值越接近1, 说明两幅图像的相似性越强, 在多小波中, 相关性越强的分量图像, 在同样压缩倍数下, PSNR 越高, 表现越优。同时对于四个多小波分量图像, 我们可以得到6个相关系数, 然后对这6个相关系数求均值, 作为最后四个分量图像的相关系数, 如表1。可见虽然相关性最强的是4阶插值平衡多小波, 能量最集中的仍是 Cardbal4多小波, 而且它还具有最高的逼近阶, 理论上推测这个是最好的多小波, 下面的仿真实验也证明了这一失断的正确性。

表1 各种多小波的性质比较

	滤波器 长度	小波 长度	消失 矩	逼近 阶	能量 集中比	相关 系数
GHM	4	4	2	2	97.02%	0.9296
Cardbal2	6	6	2	2	97.24%	0.9404
Cardbal3	8	8	3	3	97.17%	0.9389
Cardbal4	12	12	4	4	97.28%	0.9488

三、实验结果

基于小波的滤波特性, 经过小波变换以后的高频系数都几乎接近于0, 而大量的数值较大的系数都保存在低频部分。在零树编码中, 我们用到了逐次逼近量化(SAQ), SAQ 连续地应用数和不重要系数。依照这个思想, 我们对图像压缩设计了一种简单的仿真编码方案——直接保留系数法。

设一幅 $N \times N$ 的图像经过多小波变换后的系数为 $\{C_{i,j}\}, 0 \leq i, j \leq N-1$, 将所有的 $C_{i,j}$ 按照从大到小的顺序排列, 同时设计一个次链表来记录 $C_{i,j}$ 原来的所在位置。在此基础上保留 $\frac{N \times N}{64}$ 个系数的效果与零树编码中保留 $\frac{N \times N}{64}$ 个的系数的效果相

表2 64:1恢复图像的 PSNR 值

	GHM	Cardbal2	Cardbal3	Cardbal4	单小波 D4
Lena	29.1278	29.3007	29.1474	29.3949	28.8061
Barbara	24.0355	24.0633	23.9534	24.1659	23.7683
Golhill	27.1109	27.3404	27.1844	27.4026	27.2066

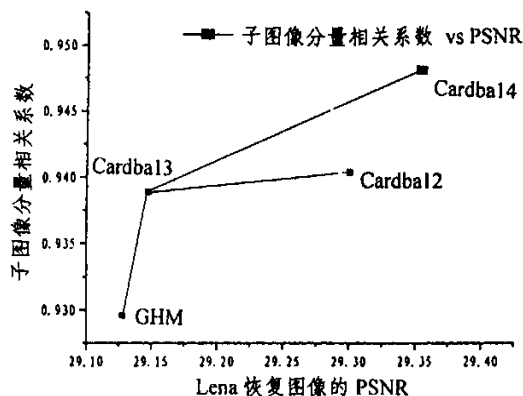


图2

近。于是，我们从大到小依次取 $\frac{N \times N}{64}$ 个系数，称它们为重要系数，而后面的系数全部都认为不重要，全部置“0”。最后，由链表记录的位置信息，将重要系数置于原来位置，对于不重要系数的位置设为0。以上分析的所有多小波，都保留 $\frac{1}{64}$ 的系数，重构以后得到的 PSNR 值。用这种方法我们可以不用做复杂的图像编码，同时又能够检测出哪一个多小波基适合我们即将处理的图像，能够实现压缩效果，从恢复的图像中我们可以算出 PSNR 值，展开对算法之间的比较。这样，我们可以对很多的多小波基做比较选择，参考以上的对称性，消失矩，逼近阶，能量集中特性，相关系数这些标准，最佳多小波基是 Cardbal4，并且这类插值平衡多小波不必做预处理和后处理，能节约编码时间。图3图2给出了 PSNR 与能量集中特性，及相关系数之间的关系，我们可以直观地看出 Cardbal4 这种多小波的优势。表2给出不同图像的仿真结果，可以看出多小波在处理高频含量较多的图

像(如 Barbara)时，比单小波更有优势。

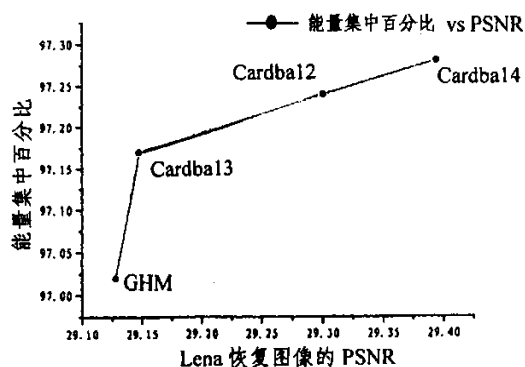


图3

结论 实际应用中，多小波的优势并不比单小波明显，但是多小波有很大的自由度和发展潜力，多个尺度函数决定了多小波比单小波具有更好的性质。多小波各个尺度函数之间的相关性，反映在图像中就是分解后分量图像的相关性，我们提出的新的多小波选择标准就是对其相关性的应用的一种探索，不仅有利于人们选择最佳多小波，而且有利于根据分量图像相关性、差异性进行多小波编码的研究。

参考文献

- 1 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several functions. J. Approx. Theory, 1994, 78(4): 373~401
- 2 Strela V, Walden A T. Orthogonal and biorthogonal multiwavelets for signal de-noising and image compression. SPIE Proc. 3391 AeroSense 98, Orlando, Florida, April 1998
- 3 Selesnick I W. Cardinal Multiwavelets and the Sampling Theorem. ICASSP-99, SPTM 3. 3, 1999, 3: 1209~1212
- 4 Chui C K, Lian J A. A study of orthonormal multiwavelets. Applied Numerical Mathematics, 1996, 20(2): 273~298
- 5 Martin M B. Applications of Multiwavelets to Image Compression. Thesis of Master of Science in E. E., Virginia Tech 1999
- 6 Selesnick I W. Balanced Multiwavelet Bases Based on Symmetric FIR Filters. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48: 184~191

(上接第71页)

中率和效率。我们用事件驱动仿真评估，从 Cache 的大小、视频普及性变形、用户观察行为以及其它一些相关参数对缓存-组播策略、变体积段策略、整个视频策略和一个前缀/后缀 Cache 策略进行了比较，结果表明：(1)缓存-组播策略不仅有效地降低了整个交通资源，增加了字节命中率，而且降低了请求开始的请求时间。(2)当 Cache 大小有限、用户请求集中在一段时间内、设置的热媒体(hot media)对象随时间改变、大量的媒体对象下展开请求、媒体文件体积很大，以及在许多用户仅看了一点初始段就停止观

看视频时，缓存-组播策略都具有最佳的效果，它是提高流媒体代理 cache 效率的有效策略。

参考文献

- 1 Miao Z, Ortega A. Proxy caching for efficient video services over the Internet. In: Proc. of Int. Web Caching Workshop, Apr. 1999
- 2 Wu K L, Yu P S. Segment-Based Proxy Caching of Multimedia Streams. In: Proc. Of IEEE INFOCOM, May 2001
- 3 Sen S, Reford J, Towsley D. Proxy prefix caching for multimedia streaming. In: Proc. of IEEE INFOCOM, Mar. 1999
- 4 Zipf G K. Human Behaviour and the Principles of Least Effort, Addison-Wesley. Cambridge, MA, 1949