一种基于 Newton-Thiele 型有理插值曲面的图像缩放方法*)

A Method of Image Enlargement and Reduction Based on The Newton-Thiele's Interpolation Surface

胡 敏 檀结庆

(合肥工业大学计算机信息学院 合肥230009)

Abstract A method of image resizing is presented in this paper. It is based on The Newton-Thiele's interpolation surface. First , a Newton-Thiele's interpolation surface is constructed for each color component of a digital image, and then , the surfaces with different sampling rates are resampled to generate the required resized image . The experimental results show that the method can greatly improve the quality of resized image.

Keywords Newton-Thiele' continued fractions, Interpolation surfaces, Enlargement, Reduction

1. 引言

为获得较好的视觉效果或适应某些特殊场合的需要,常要对图像进行缩放处理。图像的缩放可归结为对图像进行几何运算,它分两步进行:首先对图像进行空间变换;其次对图像进行灰度级插值。一般的方法是使用简单的比例变换,但这种方法时常会引起比较严重的图像走样,尤其是当图像中包含像素之间灰度级有变化的细微结构时,会在图像中产生人工的痕迹,图像带有大量锯齿形。双线性插值具有平滑作用,可能会使图像的细节产生退化,尤其是在进行放大处理时,会丢失重要的边缘特征信息[1]。文[2,3]提出了一种利用 B 样条插值的图像放大方法,使放大后的图像质量得到了很大的改善,但该方法的缺点是速度慢。文[4]利用 Bézier 插值曲面对图像进行放大,其计算量也大,执行速度也较慢。以上方法均采用线性插值,都是在假设图像像素和周围像素呈线性关系、色彩变化均匀的基础上进行的,但事实上图像的有些纹理之间或像素间呈突变性质,具有非线性关系,这时若采用纯线性函数进行拟合会使边缘信息模糊,或丢失重要的边缘信息。在文[5]中首次提出了一种基于 Newton-Thiele 型连分式插值的代数曲面三维重建算法,该方法具有计算简单、便于编程实现的特点。经过对比分析,这里成功地将该算法应用于图像任意比例的放大或缩小,并给出了详细的算法和实验结果。

2. Newton-Thiele 型连分式插值曲面

2.1 Newton-Thiele 型插值曲面公式及算法

记 $X_m=\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}\subset[a,b]\subset R$, $Yn=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\subset[c,d]\subset R$

$$\Pi_{m,n}=X_m\times Y_n=\{(x_i,y_j)\mid x_i\in X_m,y_j\in Y_n,\ i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n\}$$

并设 $f(x,y)$ 为给定的 $[a,b]\times[c,d]$ 在上有定义的二元函数。在引进二元混合差商[5,6] $\varphi(x_0,\cdots,x_1;y_0,\cdots,y_1)$ 的基础上,定义二元有理插值格式[7,8]为

$$R_{m,n}(x,y)=T_0(y)+T_1(y)(x-x_0)+T_2(y)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+T_m(y)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1}) \quad (1)$$

其中

$$T_i(y)=\varphi(x_0,\cdots,x_i;y_0)+\frac{y-y_0}{\varphi(x_0,\cdots,x_i;y_0,y_1)}+\frac{y-y_1}{\varphi(x_0,\cdots,x_i;y_0,y_1,y_2)}+\cdots+\frac{y-y_{n-1}}{\varphi(x_0,\cdots,x_i;y_0,\cdots,y_n)},i=0,1,\cdots,m \quad (2)$$

是关于变量 y 的 Thiele 型连分式[7,8],由(1)和(2)式确定的 $R_{m,n}(x,y)$ 满足

$$R_{m,n}(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)\quad \forall\ (x_i,y_j)\in\Pi_{m\times n}$$

其中 $f(x_i,y_j)$ 是插值曲面 $R_{m,n}(x,y)$ 的控制顶点,或称 $\{f(x_i,y_j)\mid(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n)\}$ 为控制网格,文[5]中还给出了 Newton-Thiele 型插值曲面的矩阵算法,这里不再详述。

Newton-Thiele 型插值曲面就是由一组控制顶点生成的有理曲面。它可以用于一组数据点之间进行插值,以获得平滑过渡。本文将 Newton-Thiele 型插值曲面用于颜色分量的插值。

2.2 由数字图像构造 Newton-Thiele 型插值曲面

假设 $f(x,y)$ 是一个 $M\times N$ 的数字图像,它提供了图像色彩的三个离散的信息阵列,每个色彩分量对应于一个阵列。插值方法的意义在于将有限的

*)本文得到国家自然科学基金(项目编号:10171026)和教育部资助优秀年轻教师基金资助。胡 敏 讲师,博士研究生,主要研究方向为图像处理、计算机应用等。檀结庆 博士,教授,博士生导师,主要研究方向为 CAGD,小波理论、图像处理技术。

离散信息变换为一个连续的信息。

设 $R_{i,j}(1\leqslant i\leqslant M,1\leqslant j\leqslant N)$ 是 $f(x,y)$ 中第 i 行第 j 列像素的红色分量，它与像素平面上的二维点 (i,j) 相对应。我们的任务是构造一个二元有理函数 $I(x,y)$ 满足 $I(i,j)=R_{i,j}$。为了简化计算的复杂性，我们采用分块曲面拼接的方法，每块曲面的控制网格为3×3。

首先，将矩阵 $R_1=\{R_{i,j},1\leqslant i\leqslant M,1\leqslant j\leqslant N\}$ 扩充为 $R_2=\{R_{i,j},1\leqslant i\leqslant M+1,1\leqslant j\leqslant N+1\}$，也即补充 $R_{i,j}(i=M+1$ 或 $j=N+1)$ 的值，利用向外插值法，取 $R_{M+1,j}=2R_{M,j}-R_{M-1,j}(1\leqslant j\leqslant N)$，$R_{i,N+1}=2R_{i,N}-R_{i,N-1}(1\leqslant i\leqslant M)$，$R_{M+1,N+1}=R_{M+1,N}+R_{M,N+1}-R_{M,N}$，然后再将 R_2 扩充为 $R_3=\{R_{i,j},0\leqslant i\leqslant M+1,0\leqslant j\leqslant N+1\}$，其扩充方法同 R_2，最后在 R_2 的基础上构造 $M\times N$ 个3×3的 Newton-Thiele 型插值曲面 $I_{i,j}$。

$$I_{i,j}(x,y)=T_0(y)+T_1(y)(x-x_{i-1})+T_2(y)(x-x_{i-1})(x-x_i)$$
$$(i=1,2,\cdots,M;j=1,2,\cdots,N)$$

每一个 $I_{i,j}$ 的的控制网格为：

$$M_0=\begin{bmatrix} R_{i-1,j-1} & R_{i,j-1} & R_{i+1,j-1} \\ R_{i-1,j} & R_{i,j} & R_{i+1,j} \\ R_{i-1,j+1} & R_{i,j+1} & R_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$$

这里$1\leqslant i\leqslant M,1\leqslant j\leqslant N$。

$\overline{X}_3=\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\}$，$\overline{Y}_3=\{y_{j-1},y_j,y_{j+1}\}$

$\Pi_{3,3}=\overline{X}_3\times\overline{Y}_3=\{(x_u,y_v)\mid x_u\in\overline{X}_3,y_v\in\overline{Y}_3,u=i-1,i,i+1;v=j-1,j,j+1\}$

依据文[5]，则 $I_{i,j}$ 插值曲面的具体算法如下：

第一步：初始化。

令

$$\mathcal{J}_{u,v}^{(0,0)}=f_{u+i-1,v+j-1}^{0,0}=R_{u+i-1,v+j-1},\quad u,v=0,1,2 \tag{3}$$

则

$$M_0=\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{0,0}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,0}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{2,0}^{(0,0)} \\ \mathcal{J}_{0,1}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,1}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{2,1}^{(0,0)} \\ \mathcal{J}_{0,2}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,2}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{2,2}^{(0,0)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

M_0称初始信息矩阵。

第二步：x 方向 Newton 递推。对 $v=0,1,2;p=1,2;u=p,p+1,\cdots,2$

令

$$\mathcal{J}_{u,v}^{(p,0)}=\frac{\mathcal{J}_{u,v}^{(p-1,0)}-\mathcal{J}_{p-1,v}^{(p-1,0)}}{\overline{x}_u-\overline{x}_{p-1}} \tag{5}$$

其中，$\overline{x}_u=x_{u+i-1}$，$\overline{x}_{p-1}=x_{p+i-2}$。

上述递推过程旨在通过 $m(m+1)(n+1)/2$ 即9次乘法运算(列变换)将初始信息 M_0 矩阵转换为

$$M_1=\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{0,0}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,0}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{2,0}^{(0,0)} \\ \mathcal{J}_{0,1}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,1}^{(1,0)} & \mathcal{J}_{2,1}^{(2,0)} \\ \mathcal{J}_{0,2}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,2}^{(1,0)} & \mathcal{J}_{2,2}^{(2,0)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

第三步：y 方向 Thiele 递推。对 $u=0,1,2;q=1,2;v=q,q+1,\cdots,2$，令

$$\mathcal{J}_{u,v}^{(u,q)}=\frac{\overline{y}_v-\overline{y}_{q-1}}{\mathcal{J}_{u,v}^{(u,q-1)}-\mathcal{J}_{u,q-1}^{(u,q-1)}} \tag{7}$$

其中，$\overline{y}_v=y_{v+j-1}$，$\overline{y}_{q-1}=y_{q+j-2}$。

上述递推过程旨在通过 $n(n+1)(m+1)/2$ 次乘法运算(行变换)将信息矩阵 M_1 进一步变换为

$$M_2=\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{0,0}^{(0,0)} & \mathcal{J}_{1,0}^{(1,0)} & \mathcal{J}_{2,0}^{(2,0)} \\ \mathcal{J}_{0,1}^{(0,1)} & \mathcal{J}_{1,1}^{(1,1)} & \mathcal{J}_{2,1}^{(2,1)} \\ \mathcal{J}_{0,2}^{(0,2)} & \mathcal{J}f_{1,2}^{(1,2)} & \mathcal{J}_{2,2}^{(2,2)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

第四步：利用 M_2 的第 $u+1$ 列元素 $\mathcal{J}_{u,v}^{(u,v)}$，$v=0,1,2$ 构造关于 y 的 Thiele 型连分式 $T_u(y)$，即：令

$$T_u(y)=\mathcal{J}_{u,0}^{(u,0)}+\frac{y-\overline{y}_0}{\mathcal{J}_{u,1}^{(u,1)}}+\frac{y-\overline{y}_1}{\mathcal{J}_{u,2}^{(u,2)}},u=0,1,2$$

第五步：令

$$\begin{aligned} I_{i,j}(x,y)&=T_0(y)+T_1(y)(x-\overline{x}_0)+T_2(y)(x-\overline{x}_0)(x-\overline{x}_1) \\ &=T_0(y)+T_1(y)(x-\overline{x}_{i-1})+T_2(y)(x-\overline{x}_{i-1})(x-\overline{x}_i) \end{aligned}$$

则 $I_{i,j}(x,y)$ 即为分块 $R_{i,j}$ 的二元有理插值函数。

用同样的方法可以为 $f(x,y)$ 的绿色分量 $G(x_i,y_j)$ 和蓝色分量 $B(x_i,y_j)$ 构造分块 Newton-Thiele 型插值曲面。

3. 利用 Newton-Thiele 型插值曲面进行图像缩放

数字图像的缩放实质上就是对图像重采样的过程。把图像看成是一个采样点在整数点上的二维离散信号，先对其进行插值，然后再重采样。即如果原图大小为 $M\times N$，处理后的大小为 $M'\times N'$，则重采样点的位置是 $\left|\left[i\times\frac{M}{N}\right],\left[j\times\frac{N}{N}\right]\right|$，$i=0,1,\cdots,M'-1;j=0,1,\cdots,N'-1$。

设输入图像 $f(x,y)$ 是一个 $M\times N$ 的数字图像，是一个采样点在整数点上的二维离散信号，处理后的图像 $f'(x',y')$ 大小为 $M'\times N'$，则 $f'(m',n')$ 相对于 $f(m,n)$ 而言，在 x 方向和 y 方向的压缩比为

$scalex=M/M'$

$scaley=N/N'$

令 $R(i',j')$ 是 $f'(m',n')$ 的第 i' 行第 j' 列像素点 $P'(i',j')$ 的红色分量，则由映射关系知 $P'(i',j')$ 对应于 $f(m,n)$ 中的点位置 (x,y) 为：

$x=i'\times scalex$

$y=j'\times scaley$

令

$i=round(x)$，$j=round(y)$

$\Delta x=x-i+1$，$\Delta y=y-j+1$

则 $f(m,n)$ 中坐标为 (x,y) 的点就是 $f(m,n)$ 的第 (i,j) 像素插值块内 $(\Delta x,\Delta y)$ 坐标处的点。所以 R

(i',j')的值就等于 $f(m,n)$的红色分量的 Newton-Thiele 型插值曲面的第(i,j)块 $I_{i,j}$在$(\Delta x,\Delta y)$坐标处的值。

利用同样的方法，可以求出绿色分量 $G(i,j)$和蓝色分量 $B(i,j)$的值。

4. 实验结果

我们在 Pentium 655上用 Dephi 5.0实现了该算法，并验证了该方法的可行性。以256×256的图 Panda.bmp 为例，分别对其进行放大和缩小。如图1—图3所示。图2的执行时间为535ms。图3的执行时间为172ms。同文[2]和文[4]相比，速度明显提高。

图1 Panda 原图

图2 利用本文放大(307×460)

图3 利用本文缩小(205×128)

结论 从实验结果可以看出，利用 Newton-Thiele 型插值曲面进行缩放效果是好的，是一种既快速又能保证质量的图像缩放方法，这对于在多媒体和互联网上图像的处理有一定的意义。

参考文献

1 朱志刚，林学訚，石定机译. 数字图像处理. 北京：电子工业出版社，1998. 97～117

2 杨朝霞，等. 用B样条的尺度关系来实现图像任意精度的放大缩小[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2001，13(9)：824～827

3 Durand C X, Faguy D. Rational zoom of bitmaps using B-spline interpolation in computerized 2-D animation. Computer Graphics Forum. 1990，9(1)：27～37

4 孙庆杰，等. 一种基于 Bézier 曲面的图像放大方法[J]. 软件学报，1999，10(6)：570～574

5 檀结庆，胡敏，刘小平. 有理曲面的三维重建[J]. 计算机应用 2000，20(Suppl.)：57～59

6 Tan Jieqing, Fang Yi. Newton-Thiele' rational interpolants[J]. Numerical Algorithms，2000，24：141～157

7 Tan J. Bivariate blending rational interpolants[J]. Approx. Theory &its Application, 1999，15(2)：74～83

8 Siemaszko W. Thiele-type branched continued fractions for two variable functions[J]. Comput. Appl. Math.，1983，9：137～153

(上接第96页)

2 Landgrebe D. Some fundamentals and methods for hyperspectral image data analysis. SPIE International Symposium on Biomedical Optics (Photonics West), San Jose California, Jan. 1999. 23～29

3 Heermann P D, Khazenie N. Classification of multispectral remote sensing data using a back-propagation neural network. IEEE Trans. on Geosci and Remote Sensing，1992，30(1)：81～88

4 He Mingyi, Bogner R E, et al. Classification of multispectral imagery by using neural network with binary data. Australia First Conference on Artificial Neural Networks, Sydney, Jan. 1990

5 Haykin S. Neural networks: A comprehensive foundation. Prentice Hall, 2001

6 Vapnik 著，张学工译. 统计学习理论的本质. 清华大学出版社，2000

7 Schölkof B. Support vector learning: [PhD Thesis]. Berlin, 1997

8 Burges CJC. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. Knowledge Discovery and Data Mining，1998，2(2)

9 陈宝林. 最优化理论与算法. 清华大学出版社，1996