

# 基于多尺度马尔可夫随机场的图像分割<sup>\*</sup>

汪西莉<sup>1,2</sup> 焦李成<sup>1</sup>(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安710071)<sup>1</sup>(陕西师范大学计算机学院 西安710062)<sup>2</sup>

## Image Segmentation Based on Multiscale Markov Random Field

WANG Xi-Li<sup>1,2</sup> JIAO Li-Cheng<sup>1</sup>(National Key Lab. of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)<sup>1</sup>(School of Computer Science, Shannxi Normal Univ., Xi'an 710062, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The noniterative algorithm of multiscale MRF has much lower computing complexity and better result than its iterative counterpart of noncausal MRF model, since it has causality property between scales, and such causality is consistent with the character of images. Maximizer of the posterior marginals (MPM) algorithm of multiscale MRF model is presented for only one image can be obtained in image segmentation. EM algorithm for parameter estimate is also given. Experiments demonstrate that comparing with iterative ones, the proposed algorithms have the characteristics of greatly reduced computing time and better segmentation results. This is more notable for large images.

**Keywords** Multiscale markov random field (MRF), Noniterative algorithm, Iterative algorithm, Maximizer of the posterior marginals (MPM), Expectation maximization (EM)

离散马尔可夫随机场(MRF)模型是贝叶斯图像分割中最常用的工具。一般采用双MRF,一个随机场对应于观测图像,另一个随机场对应于未知的分类标号。通过迭代的算法将图像的局部信息逐步传递到整个图像,以求得分割标号的最大后验概率(MAP)或最大后验边缘概率(MPM)估计。近年来提出的多尺度MRF模型(或称因果MRF、分层MRF模型)将图像建模为若干层(又称尺度)的MRF,在层和层之间建立起因果关系,将双MRF中平面网格上信息的迭代扩散转换为信息在不同层次间的传递,从而得到类似于马尔可夫链的非迭代的前向、后向算法,而且这种因果关系和图像的多分辨率性是一致的。理论和实验结果说明,这种因果模型抓住了图像的性质,基于因果性的信息传递得到了更精确的统计结果,非迭代的推导算法大大减少了计算量。

很多学者针对这类模型进行了研究<sup>[1-5]</sup>, J-M. Laferte<sup>[3]</sup>等提出了基于多分辨率数据的MAP、MPM算法,并给出了相应的EM算法来估计模型参数,但在实际问题中往往得到的不是多分辨率数据。C. A. Bouman<sup>[4]</sup>等针对观测数据只有一幅图像的情况,给出了SMAP算法及部分参数的估计。本文考虑到大多数情况下观测数据是有限的,针对只有一幅图像的情形,导出了非迭代的MPM算法,它比MAP算法更为合理,因为MAP要对任何误分类的像素最小化后验概率,过于保守,MPM则不然。本文还介绍了基于EM算法的参数估计,给出了人工合成图像的实验结果及分析。

### 1 多尺度MRF图像模型

令观测图像对应的随机场为 $Y$ ,它位于2维网格系统 $S$ 中。对于所采用的灰度图像来说, $Y$ 的取值 $y \in \Omega$ 。 $Y$ 要被分割成具有各自统计特性的 $M$ 个不同的类。 $X$ 是不可观测的随机

场, $X$ 中任一像素的取值 $x \in \Delta, \Delta = \{1, 2, \dots, M\}$ 。 $X$ 的每一像素代表 $Y$ 中对应像素所属类的标号,图像分割就是要确定图像中各像素类的标号。 $X$ 由多层随机场组成,记为 $X^0, X^1, \dots, X^n$ 。 $X^0$ 是最上层,只有一个节点,对应于最粗糙的尺度,最下层 $X^n$ 的大小和 $Y$ 相同,对应于最精细的尺度。 $X^i$ 位于网格 $S^i$ 中, $X^i$ 中的一个像素对应于 $X^{i+1}$ 中的四个像素,因此每层的像素数是上一层的4倍。多尺度MRF形成了二叉树结构,见图1。

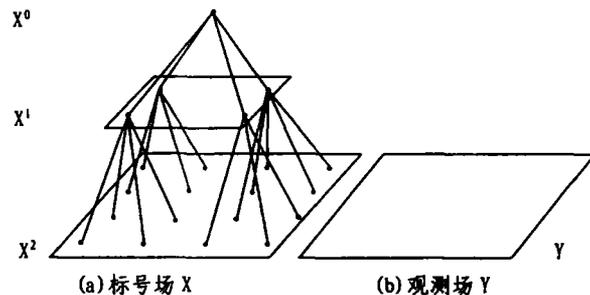


图1 分层MRF图像模型

对任一节点 $x_s, s \in S^1, \dots, S^{n-1}$ ,都有1个父节点和4个子节点,分别记为 $x_{p(x_s)}, x_{c(x_s)}$ 。上一层的节点 $x_s$ 在下一层由4个节点代表,即随机场 $X$ 自上而下分辨率增加。最上层的一个节点没有父节点,称为根节点;最下层的节点没有子节点,称为叶子节点。

用条件分布 $P(Y=y|X=x)$ (简记为 $P(y|x)$ )描述观测数据对标号的依赖性,用先验分布 $P(X=x)$ (简记为 $P(x)$ )描述关于分割的先验信息,因此可根据贝叶斯理论求得 $X$ 的后验分布。

<sup>\*</sup>国家自然科学基金重点项目(60133010)和教育部博士点基金资助项目。汪西莉 副教授,博士研究生,主要研究方向:智能信息处理、模式识别。焦李成 教授,博士生导师,主要研究方向:智能信息处理、非线性理论。

多尺度 MRF 和非因果的 MRF 相比具有一些重要的性质, 使我们推导出非迭代的算法。首先, 尺度间具有马尔可夫性质, 即  $X^i$  的分布只依赖于  $X^{i-1}$ , 和其它更粗糙的尺度无关, 这是因为  $X^{i-1}$  已经包含了所有位于其上层的尺度所含有的信息。使随机场从上到下形成了马尔可夫链。其次, 若  $X^i$  中像素的父节点已知, 则  $X^i$  中的像素彼此独立, 即随机场像素具有条件独立性。这一性质使我们不必再考虑平面网格中相邻像素间的关系, 而转为研究尺度间相邻像素 (即父子节点) 间的关系。第三, 若  $X^n$  给定, 则  $Y$  中的像素彼此独立。最后, 对任一节点  $x_s, s \in S^0, \dots, S^{n-1}$ , 若给定  $x_s$ , 则以其各子节点为根的子树所对应的变量相互独立。

根据贝叶斯公式和上述性质,  $X, Y$  的联合分布具有如下形式:

$$P(x, y) = P(x^0) \prod_{s \in S^n} P(y_s | x_s) \prod_{i=1}^n P(x^i | x^{i-1})$$

## 2 MPM 算法

图像分割即已知观测图像  $y$ , 估计  $X$  的配置。采用贝叶斯估计器, 可由一优化问题表示:  $\hat{x} = \arg \min_x E[C(X, x) | Y = y]$ , 代价函数  $C$  给出了真实配置为  $X$  而实际分割结果为  $x$  时的代价。在已知  $y$  的情况下, 最小化这一代价的期望, 从而得到最佳的分割。代价函数取法不同, 得到了不同的估计器, 它们的性质也有所不同。

MAP 估计器的代价函数为  $C(X, x) = 1 - \delta(X, x)$ ,  $X = x$  时,  $\delta(X, x) = 1$ , 否则  $\delta(X, x) = 0$ 。它意味着  $X, x$  只要在一个像素处有不同, 则代价为 1, 对误分类的惩罚比较重, 而在实际中存在一些误分类是完全允许的。

MPM 估计器的代价函数为  $C(X, x) = \sum_{s \in S} \delta(X_s, x_s)$ , 和 MAP 相比对误分类的惩罚不那么严格, 更符合实际一些。MPM 估计器得到的估计值  $\hat{x}_s = \arg \max_x P(x_s | y)$ 。从联合概率  $P(x, y)$  求后验边缘概率  $P(x_s | y)$  是一难题, 一般采用 Monte Carlo 方法求解, 其收敛速度很慢。多尺度 MRF 模型由于尺度间具有马尔可夫链的性质, 和马尔可夫链的 Baum-Welch 算法类似, 可通过向上、向下的两步扫描来求后验边缘概率, 得到非迭代的算法。

用  $d(s)$  代表以  $s$  为根的子树的叶子节点。根据贝叶斯公式及多尺度 MRF 模型的性质, 有

$$P(x_s | y) = \sum_{x_{p(s)}} P(x_s | x_{p(s)}, y) P(x_{p(s)} | y) = \sum_{x_{p(s)}} P(x_s | x_{p(s)}, y_{d(s)}) P(x_{p(s)} | y) \quad (1)$$

由这一递推公式可知, 若可求出最上层的后验边缘概率及各父子节点的部分后验  $P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)})$ , 则可逐层推出后验边缘概率。假设  $P(x_s^0)$  为均匀分布, 则其它层的先验  $P(x_s) = \sum_{x_{p(s)}} P(x_s | x_{p(s)}) P(x_{p(s)}) = P(x_{p(s)})$ 。父子部分后验有以下形式:

$$P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)}) = P(x_{p(s)} | x_s) P(x_s | y_{d(s)}) \propto P(x_s | x_{p(s)}) P(y_{d(s)} | x_s) P(x_{p(s)}) = P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s | x_{p(s)}) \quad (2)$$

$$P(y_{d(s)} | x_s) = \sum_{x_{c(s)}} P(y_{d(s)} | x_{c(s)}, x_s) P(x_{c(s)} | x_s) = \prod_{i \in c(s)} \sum_{x_i} P(y_{d(i)} | x_i) P(x_i | x_s) \quad (3)$$

将算法分为两步求后验边缘概率。首先向上逐层传递过程根据 (2)、(3) 式计算  $P(y_{d(s)} | x_s)$  和  $P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)})$ , 向下过程根据 (1) 式计算  $P(x_s | y)$ 。记该算法为 CT-MPM, 其向上、向下两步扫描过程为:

(1) 向上算法

- 对  $s \in S^n$ , 计算  $P(y_{d(s)} | x_s) = P(y_s | x_s)$
- 对  $s \in S^{n-1}, \dots, S^0$ , 根据 (3) 式计算  $P(y_{d(s)} | x_s)$
- 对  $s \in S^{n-1}, \dots, S^1$ , 根据 (2) 式计算  $P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)})$

(2) 向下算法

- 对  $s \in S^0, P(x_s | y) \propto P(y | x_s) P(x_s) = P(y_{d(s)} | x_s) P(x_s)$
- 对  $s \in S^1, \dots, S^n$ , 根据 (1) 式计算  $P(x_s | y)$
- $\hat{x}_s = \arg \max_x P(x_s | y)$

该算法的复杂度为  $O(MN)$ ,  $M$  为类数,  $N$  为图像像素数。因此, 和迭代算法相比, 在计算上具有极大的优势。

## 3 参数估计

参数估计的目标是求得使  $\log P(y | \theta)$  最大的参数值  $\theta$ ,  $y$  称为不完全数据。完全数据为  $(x, y)$ , 为此通常采用迭代的 EM 算法。由于不完全数据似然难以计算, 用联合数据似然的期望来代替  $\log P(y | \theta)$ , 可证明迭代过程收敛于  $\log P(y | \theta)$  的局部极大值<sup>[3]</sup>。EM 算法首先置初始参数值, 然后交替执行 E 步、M 步, 直至收敛。E 步在当前参数  $\theta^i$  下计算联合似然的期望  $E[\log P(X, y | \theta) | y, \theta^i]$ , M 步求新的参数值  $\theta = \arg \max_{\theta} E[\log P(X, y | \theta) | y, \theta^i]$ 。

假设数据的每一类服从高斯分布, 模型参数  $\theta = \{P(x^0), P(x^i | x^{i-1}), \mu_k, \sigma_k^2\}$ ,  $P(x^0)$  为根节点先验,  $P(x^i | x^{i-1})$  为各层间的转换概率,  $\mu_k, \sigma_k^2$  分别为每类的均值、方差。

多尺度 MRF 模型联合数据似然的期望为:

$$E[\log P(X, y | \theta) | y, \theta^i] = \sum_{x \in A} P(x | y, \theta^i) \log [P(x^0 | \theta) \prod_{s \in S^n} P(y_s | x_s, \theta) \prod_{i=1}^n P(x^i | x^{i-1}, \theta)] = \sum_{i \in A} \log P(x^0 = i | \theta) P(x^0 = i | y, \theta^i) + \sum_{s \in S^n} \sum_{i \in A} \log P(y_s | x_s = i, \theta) P(x_s = i | y, \theta^i) + \sum_{i, j \in A} \sum_{s \in S^1, \dots, S^n} \log P(x_s = j | x_{p(s)} = i, \theta) P(x_s = j, x_{p(s)} = i | y, \theta^i) \quad (4)$$

采用 Lagrange 乘子技术, 并在约束条件  $\forall i \sum_{j \in A} P(x_s = j | x_{p(s)} = i) = 1, \sum_{i \in A} P(x^0 = i) = 1$  及  $\sum_{i \in A} P(y_s = 1 | x_s = i) = 1$  下最大化 (4) 式, 得到参数的更新值:

$$P(x^0 = i) = P(x^0 = i | y, \theta^i) \quad (5)$$

$$P(x_s = j | x_{p(s)} = i) = \frac{\sum_{s \in S^0} P(x_s = j, x_{p(s)} = i | y, \theta^i)}{\sum_{s \in S^0} P(x_{p(s)} = i | y, \theta^i)} \quad (6)$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{s \in S^n} P(x_s = i | y, \theta^i) \cdot y_s}{\sum_{s \in S^n} P(x_s = i | y, \theta^i)} \quad (7)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{s \in S^n} P(x_s = i | y, \theta^i) \cdot (y_s - \mu_i)^2}{\sum_{s \in S^n} P(x_s = i | y, \theta^i)} \quad (8)$$

由 CT-MPM 算法可求得后验边缘概率及各父子节点的部分后验概率, 而  $P(x_s, x_{p(s)} | y) = \frac{P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)}) P(x_{p(s)} | y_{d(s)})}{\sum_{s \in S^n} P(x_s, x_{p(s)} | y_{d(s)})}$ 。因此, 对于非因果的 MRF 要通过逼近方法才能求解的 E

步,在这里经由向上、向下两步扫描过程就可精确地求解,速度也快于逼近方法。要估计参数,在 E 步利用 CT-MPM 算法求期望,在 M 步根据(5)~(8)式更新各参数。得到最佳估计参数后,再进行分割。

#### 4 实验结果及分析

采用人工合成灰度图像进行实验。图像取值范围  $\Omega = \{0, 1, \dots, 255\}$ , 有 4 个类,  $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$ 。各类服从高斯分布, 各类的均值为 164、90、14、52, 标准差为 30、14、25、10。图像大小为  $256 * 256$ , 共有 9 层。

在参数固定的情况下,用 CT-MPM 算法对图像进行分割,并用非分层模型的 ICM 算法做了对比,ICM 是迭代的 MRF 算法中运算速度最快的,它求得的是 X 的 MAP 估计。假定  $P(x^s)$  为均匀分布。算法中转换概率为<sup>[4]</sup>:

$$P(x_s = j | x_{p(s)} = i) = \begin{cases} \alpha & , \text{若 } i = j \\ \frac{1-\alpha}{M-1} & , \text{若 } i \neq j \end{cases} \quad s \in S^1, \dots, S^n$$

实验中  $\alpha = 0.92$ 。数据条件似然:

$$P(y_s | x_s = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left\{-\frac{(y_s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\},$$

$$k = \{1, 2, 3, 4\}, s \in S^n$$

$\mu_k, \sigma_k^2$  分别为各类的均值、方差。程序采用 C 语言,在 800MHz P III 微机上实现。图 2 给出了分割结果。

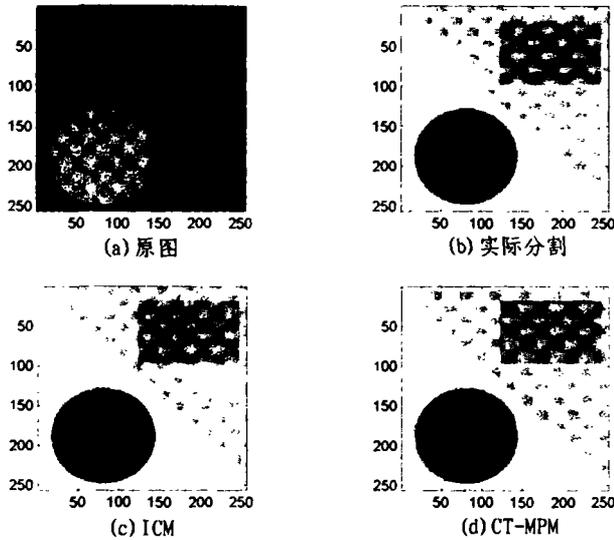


图 2 人工合成图像及各分割结果图

用 ICM、CT-MPM 得到的像素误分类数分别为 1052、701。根据实验结果可以发现,如果图像噪声少、尺寸小,则迭

代和非迭代算法都可在较短时间内得到较好的分割结果;若图像噪声多或尺寸比较大,则非迭代算法仍可在数十秒内得到误差小的分割结果,而迭代算法则不行。

采用 EM 算法估计图像模型参数,实验主要估计各类的均值和方差。迭代终止条件为  $\max_{k \in \Lambda} [(\mu_k^{t+1} - \mu_k^t)^2 + (\sigma_k^{t+1} - \sigma_k^t)^2] < \epsilon$ ,  $\epsilon$  取 0.01, 参数初值根据图像数据直方图估计。表 1 是算法运行结果。

表 1 参数估计结果

$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
15.66	50.52	89.39	159.5	16.27	9.79	13.72	29.35

算法对参数初值较敏感,这也是 EM 算法的特点。初值和最佳值接近,则收敛快,否则收敛慢,若两者差距过大,收敛值也会远离最佳值。

**结语** 本文介绍了基于多尺度马尔可夫随机场的图像模型。针对实际问题中观测数据往往只有一幅图像的情况,推导出了 MPM 算法,用它来获得图像像素所属类标号的最大后验边缘概率估计,以及用于参数估计的 EM 算法。由于模型各尺度间具有的因果关系,使我们得到了非迭代的 MPM 算法,因而相应的 EM 算法中的 E 步也成为非迭代的。这些算法在减少计算时间的同时提高了图像分割的质量,使尺寸较大的图像更易于处理。

#### 参考文献

- 1 Krishnamachari S, Chellapa R. Multiresolution Gauss-Markov random field models for texture segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1997, 6(2): 251~267
- 2 Basseville M, Benveniste A, Chou K C, et al. Modeling and estimation of multiresolution stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(3): 766~784
- 3 Laferte J-M, Perez P, Heitz F. Discrete Markov image modeling and inference on the quadtree. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(3): 390~404
- 4 Bouman C A, Shapiro M. A multiscale random field model for Bayesian image segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1994, 3(2): 162~177
- 5 Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(4): 886~902
- 6 Dempster A P, Laird N M, Rubin D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 1977, 39(1): 1~38