

多用户检测问题的半定规划坐标下降算法^{*}

刘红卫 王新辉 刘三阳

(西安电子科技大学数学系 西安710071)

A Coordinate Descent Algorithm for Multiuser Detection Based on Semidefinite Programming

LIU Hong-Wei WANG Xin-Hui LIU San-Yang

(Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an, China 710071)

Abstract In this paper, a detection strategy based on a semidefinite relaxation of the CDMA maximum-likelihood multiuser detection is investigated. Coordinate descent algorithm is used to strengthen the approximation. The simulated bit-error-rate performance demonstrates that this approach provides a good approximation to the maximum-likelihood multiuser detection.

Keywords Multiuser detection, Coordinate descent, Semidefinite programming, Bit-error-rate

1. 引言

在码分多址(CDMA)^[1]系统中,由于多个用户的随机接入,使扩频码集一般并非严格正交,这样非零相关系数会引起各用户间的相互干扰——多址干扰(MAI)^[2]。在传统的Rake检测方法^[3]中,MAI严重限制了蜂窝容量,并且必须用很强的能量来克服远近问题^[2]。

Verdu把多用户检测问题归结为一个极大似然(ML)序列检测^[4]问题。对于一个异步传输模型,每个用户用二进制序列产生器产生和发出信号,多用户的极大似然检测(MLSD)模型等同于一个二次整数规划模型。虽然对于具有特殊结构关联矩阵的问题^[5,6],已证明有多项式时间算法,但对一般关联矩阵的极大似然检测问题往往是NP-难问题^[1,7],不能有效求解。

由于MLSD的这些特点,当前的研究重点在于如何有效地寻求极大似然多用户检测问题的次优解。常用的算法有序列检测^[8]、树型搜索法^[9]、最大期望法^[10],这些算法都是通过迭代逐步提高似然函数的对数值迭代求解。但在运算过程中,干扰常常被放大,特别当信号波形显然关联时,这些算法常常效果很差^[6],从而不能有效得到次优解。近年来,松弛方法受到人们的关注,松弛方法是求解NP-难问题的一种重要方法。最大似然多用户检测问题有有界的二次规划松弛、无界的二次规划松弛及半定规划松弛(前两种松弛算法在结构上等同于像最小二乘(LMMSE)等一些著名检测问题^[11]),相比而言,半定规划松弛会给出一个更精细的界及有效次优解,成为求解多用户检测的一种重要的方法,其优点是计算简单、快捷、误码率低。

本文基于多用户检测问题的半定规划模型,以文[2]中Peng给出的多用户检测次优解为起点,利用坐标下降得到了更好的多用户检测问题的次优解。数值仿真说明这种方法可以得到比Peng的方法更低的误码率,是解决多用户检测问题的一种有效途径。

2. 系统模型

2.1 多用户检测异步模型

考虑K个用户共享的CDMA信道。每个用户都分配有

时间间隔为T的信号波形 $p_k(t)$ 。一个单一的信号波形可以表示为^[1,2]:

$$p_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k(n) p(t-nT_c), 0 \leq t \leq T$$

其中, $\{a_k(n), 0 \leq n \leq N-1\}$ 是包含N个取值为 $\{-1, 1\}$ 链的码序列。 $p(t)$ 是时间间隔为T的一个脉冲,对于N个链我们有 $T=NT_c$,不失一般性,我们下面考虑的所有信号波形都是单位能量的。

设第K个用户的信息序列记为 $\{d_k(m)\}$, $d_k(m) \in D$,其中 $D = \{-1, 1\}$ 或 $\{-1, 1, -j, j\}$ 。我们所考虑的信号序列长度是任意的,不妨记为L,传输波形可以表示为:

$$s_k(t) = c_k \sum_{i=1}^L d_k(i) p_k(t-iT)$$

其中, c_k 是复信道系数。第k个用户的合成传输信号可以表示为:

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t-\tau_k) = \sum_{k=1}^K c_k \sum_{i=1}^L d_k(i) p_k(t-iT-\tau_k)$$

其中 $\tau_k, k=1, 2, \dots, K$,是传输的时延,且满足 $0 \leq \tau_k \leq T, 1 \leq k \leq K$ 。不失一般性,我们假设 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_K < T$,这是多用户异步传输模型,当 $\tau_k=0, 1 \leq k \leq K$,则为同步传输模型。

传输信号往往被高斯白噪声(AWGN)所干扰,因此接受的信号可以表示成为:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

其中 $n(t)$ 是加性高斯白噪声,其谱密度为 σ^2 。

第k个用户在第i个间隙的匹配滤波(MF)样本输出为:

$$y_k(i) = \int_{\tau+\tau_k}^{\tau+(i+1)T+\tau_k} r(t) s_k(t-iT-\tau_k) dt,$$

$$1 \leq k \leq K, 1 \leq i \leq L$$

利用向量形式,多用户检测问题的匹配滤波输出可以表示为:

$$y = RCd + z$$

其中,C是包含各个用户信道参数的矩阵,R是 $KL \times KL$ 的关联矩阵。高斯噪声向量z是均值为0且具有自相关矩阵:

$$E[zz'] = \sigma^2 R$$

既然我们考虑高斯白噪声信道,基于 $p(y|d)$ 的负对数似然函数可以描述为 $F(d) = d^H C^H R C d - 2 \operatorname{Re}\{y^H C d\}$,带约束的多用户检测问题可以描述为:

^{*}国家自然科学基金(69972036)和陕西省自然科学基金(2001SL05)资助。

$$\bar{d} = \arg \min_{d \in D} d^H C^H R C d - 2 \operatorname{Re}\{y^H C d\} \quad (1)$$

2.2 同步模型

在同步传输中, $\tau_k = 0$, 每一个干扰用户只产生了一个信号。所以仅需在一个信号周期内考虑。当信道系数 c_k 是实数, 且 d 是二维时, 同步多用户检测模型可以记为:

$$\bar{d} = \arg \min_{d \in (\pm 1)^K} d^H C^H R C d - 2y^H C d \quad (2)$$

以下, 如果不作特别说明, 我们仅考虑同步的多用户检测问题。

3. 多用户检测问题的半定规划松弛模型

令 $Q = C^H R C, c = C y, u = d, n = K + 1$ 我们可以得到

$$\begin{cases} u^* = \arg \min_u u^H Q u - 2c^H u \\ \text{s.t. } u \in \{-1, 1\}^{n-1} \end{cases} \quad (3)$$

令 $L = \begin{bmatrix} Q & -c \\ -c^H & 0 \end{bmatrix}, x = [u^H \ u_n]^H$, 则式(3)等价于

$$\begin{cases} x^* = \arg \min_x x^H L x \\ \text{s.t. } x \in \{-1, 1\}^n \end{cases} \quad (4)$$

易知 $x^H L x = \operatorname{tr}\{L x x^H\}$, 且 $x x^H$ 是其对角线元素全为1的半正定秩1矩阵, 令 $X = x x^H$, 式(4)等价于下面的模型:

$$\begin{cases} X^* = \arg \min_X \operatorname{tr}\{L X\} \\ \text{s.t. } \operatorname{diag}(X) = e_n \\ X \geq 0 \\ \operatorname{rank}(X) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$\operatorname{diag}(X)$ 表示由 X 的对角元素构成的向量, e_n 表示分量全为1的 n 维向量, $X \geq 0 (X > 0)$ 表示矩阵 X 为半正定(正定)矩阵。

$\operatorname{rank}(X) = 1$ 是非凸的, 略去这个约束, 可以得到下面的半定规划模型^[12]

$$\begin{cases} X^* = \arg \min_X \operatorname{tr}\{L X\} \\ \text{s.t. } \operatorname{diag}(X) = e_n \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

可用内点算法^[13]求解式(6)。取 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^H$ 为 X^* 的最大特征值对应的特征向量。令 $x_i^{**} = \begin{cases} 1 & x_i^* \geq 0 \\ -1 & x_i^* < 0 \end{cases}, i = 1, \dots, n$, 记 $x^{**} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots, x_n^{**})^H$ 为多用户检测问题的一个次优解。

4. 坐标下降法

本文对由半定规划得到的次优解 x^{**} , 利用坐标下降法求得更好的次优解。

4.1 坐标下降法的基本思想

坐标下降法是一种局部搜索算法。本文利用二邻域搜索, 其邻域定义为:

$$U(x) = \{y \mid \|y - x\| \leq 2\sqrt{2}\} \cap \{-1, 1\}^n$$

二邻域的坐标下降法就是在这个邻域内进行完全搜索, 逐步迭代。显然这个邻域是 x 的分量改变一个分量或两个分量的符号所得。取 $w(p) = -4 \sum_{i=1, i \neq p}^n x_i Q_{ip} x_p, p = 1, \dots, n, w(p)$ 是在 x 的第 p 个分量的符号改变而其它分量不变的情况下, 目标值的改变量; 取 $v(k, m) = w(k) + w(m) + 8x_k C_{km} x_m, k < m, m = 2, \dots, n, v(k, m)$ 是在 x 的第 k 个和第 m 个分量的符号改变而其它分量不变的情况下, 目标值的改变量。找出 $w(p)$ 和 $v(k, m)$ 中较小的一个, 相应的改变 x , 重复这样的过程, 直到满足停止条件: $w(p) \geq 0$ 且 $v(k, m) \geq 0$, 对任意 i 和 $k \neq m$ 。

下面是坐标下降法的算法。

4.2 坐标下降算法

步骤1: x^{**} 是半定规划松弛模型得到的次优解, 记为 x

$$w(p) = -4 \sum_{i=1, i \neq p}^n x_i Q_{ip} x_p, p = 1, \dots, n$$

$$v(k, m) = w(k) + w(m) + 8x_k C_{km} x_m$$

$$f^* = f(x), \text{转步骤2.}$$

步骤2: 如果对任意 i 和 $k \neq m, w(i) \geq 0$ 且 $v(k, m) \geq 0$, 则终止, x 即为次优解。否则, 转步骤3。

步骤3: $i^* = \arg \min\{w(i), i = 1, 2, \dots, n\}, [k^*, m^*] = \arg \min\{v(k, m), k \neq m\}$

若 $w(i^*) \leq v(k^*, m^*)$,

$$w(p) = \begin{cases} w(p) - 8x_p C_{p i^*} x_{i^*}, & p \neq i^* \\ -w(i^*), & p = i^* \end{cases}$$

$$v(k, m) = w(k) + w(m) - 8x_k C_{k m^*} x_{m^*}$$

$$x_{i^*} = -x_{i^*}, f^* = f^* + w(i^*)$$

否则

$$w(p) = \begin{cases} w(p) + 8x_k C_{k p} x_p + 8x_{m^*} C_{m^* p} x_p, & p \neq k^*, m^* \\ -w(k^*) - 8x_{m^*} C_{m^* k^*} x_{k^*}, & p = k^* \\ -w(m^*) - 8x_k C_{k m^*} x_{m^*}, & p = m^* \end{cases}$$

$$v(k, m) = w(k) + w(m) + 8x_k C_{k m} x_m$$

$$x_{k^*} = -x_{k^*}, x_{m^*} = -x_{m^*}, f^* = f^* + v(k^*, m^*), \text{转步骤2.}$$

5. 仿真实验

对随机生成的 Gold 码生成的 $R^{[1]}$ 和随机生成的 b 及在不同的信噪比下求得的 y , 分别运用 peng 给出的方法和二邻域的坐标下降法进行求解, (我们用 SDP 表示 peng 的方法, 用 CDA 表示二邻域的坐标下降算法), 然后比较其误码率。仿真结果如下图:

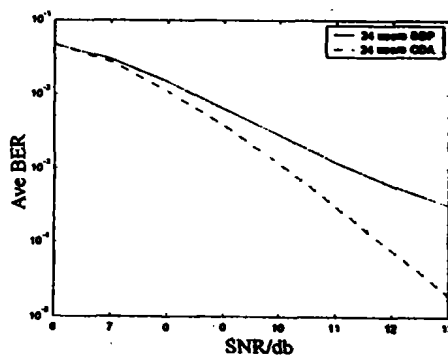


图1

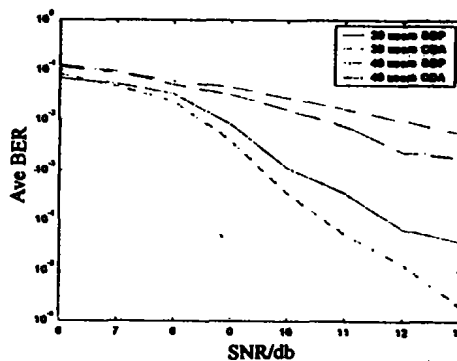


图2

(下转第149页)

implementation-of-realtime.pdf

- 11 Kent S, Atkinson R. Security Architecture for the Internet Protocol. Internet Draft, IETF, draft-ietf-ipsec-arch-sec-04. txt, March 1998. Network Working Group
- 12 Maughan D, Schertler M, Schneider M, Turner J. Internet Security Association and Key Management Protocol. Internet Draft, IETF, draft-ietf-ipsec-isakmp-09. txt, Network Working Group, 1998
- 13 Piper D. The Internet IP Security Domain of Interpretation for ISAKMP. Internet Draft, IETF, draft-ietf-ipsec-doi-08. txt, Network Working Group, 1998
- 14 Wang Xinyuan, et al. Sleepy Watermark Tracing: An Active Network-Based Intrusion Response Framework
- 15 Snapp S, et al. DIDS (Distributed Intrusion Detection System)-Motivation, Architecture and Early Prototype. In: Proc. of 14th National Computer Security Conf. 1991
- 16 Stone R. CenterTrack: An IP Overlay Network for Tracking DoS

- Floods. Proc. 9th Usenix Security Symp. , Usenix Assoc. , Berkeley, Calif. , Aug. 2000; available online at <http://www.usenix.org/publications/library/proceedings/sec2000/stone.html>.
- 17 Asaka M, et al. A Method of Tracing Intruders by Use of Mobile Agents. Proc. INET 99, Internet Soc. , Reston, Va. , June 1999. available online at <http://www.isoc.org/inet99/4k/4k-2.htm>.
- 18 Staniford-Chen S, Heherlein L T. Holding Intruders Accountable on the Internet. In: Proc. of IEEE Symposium on Security and Privacy, 1995
- 19 Jung H, et al. Caller Identification System in the Internet Environment. In: Proc. of 4th USENIX Security Symposium, 1993
- 20 Zhang Y, Paxson V. Detecting Stepping Stones. In: Proc. of 9th USENIX Security Symposium, 2000
- 21 Schnackenberg D. Dynamic. Cooperating Boundary Controllers. <http://www.darpa.mil/ito/Summaries97/E2950.html>. Boeing Defense and Space Group, March 1998

(上接第135页)

图1为24个用户情况下,分别用两种方法得到的结果,从图上可以看出二邻域的坐标下降法确实可以得到比半定规划方法更低的误码率。图2为30个、40个用户的情况,其中在信噪比为13时,最上面的线表示40个用户用半定规划方法得到的结果,第二条为40个用户用二邻域的坐标下降法得到的结果,第三条表示30个用户用半定规划方法得到的结果,第四条为30个用户用二邻域的坐标下降法得到的结果,从图中可以看出对于30个用户、40个用户而言,也得到比半定规划方法更低的误码率。

图3是用户为24,第一个用户的信噪比为9(即 $SNR(1)=9$),其它用户的信噪比变化时,第一个用户远近问题的仿真,从图中可以看出远近问题确实得到了有效控制。

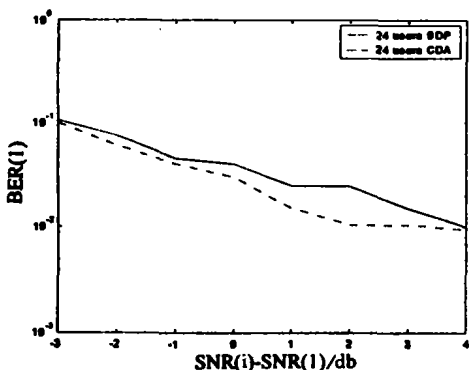


图3

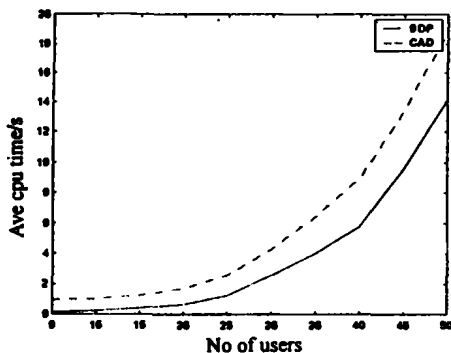


图4

图4为用户不同时,上面两种方法的时间比较,从图中可以看出虽然二邻域的坐标下降法用的时间比半定规划用的时间要长一点,但是误码率低,这说明基于半定规划的二邻域坐标下降法确实是解决多用户检测问题的一种有效途径。

注:本文所有仿真实验,是在 P ■ 450, 128M 内存的微机上用 Matlab5. 3编程所得。

参考文献

- 1 Verdu S. Multiuser Detection. Cambridge University press, 1998
- 2 Huitian P, Rasmussen L K. The application of semidefinite programming for detection in CDMA. IEEE. Selected in Communication, 2001, 19(8): 1442~1449
- 3 Moshavi S. Multiuser detection for DS-SS communications. IEEE Commun. Mag. , 1996, 34: 132~136
- 4 Verdu S. Minimum probability of error for asynchronous Gaussian multiple-access channels. IEEE Trans. Inform. Theory 1986, 32: 85~96
- 5 Verdu S. Computation complexity of optimum multiuser detection. Algorithmica, 1989, 4: 303~312
- 6 Kailath T, Poor H V. Detection of stoch processes. IEEE trans. Inform. Theory. 1998, 44(6): 2230~2259
- 7 SANKARAN C, Ephremides A. Solving a class of optimum multiuser detection problems with polynomial complexity, 1998, 44(5): 1958~1961
- 8 Varansi M K. Cyclic decision feedback multiuser sequence detection. Communication, control, and computing, 1994. 372~381
- 9 Wei L, Krasnussen L, Wyrwas R. Near optimum tree-search detection schemes for bit-synchronous multiuser CDMA system over Gaussian and two-path Rayleigh-fading channels. IEEE trans Commun. 1991, 39: 725~736
- 10 Nelson L B, Poor H V. Iterative multiuser receiver for CDMA channels: An EM-based approach. IEEE, trans, Commun, 1996 44(12): 1700~1710
- 11 Nesterov Y E. Quality of semidefinite relaxation for nonconvex quadratic optimization CORE discussion paper # 9719, Belgium, March 1997
- 12 Spoliak, Rendl F. Solving the Max-cut problem using eigenvalue. Discrete Appl, 1995, 62 : 249~278
- 13 Nesterov Y, Nemirovsky A. Interior point methods in convex programming: theory and applications, SIAM. Philadelphia, PA, 1994