Vague 集的三维表示及相似度量*)

蔡立晶 吕泽华 李 凡
（华中科技大学计算机科学与技术学院 武汉430074）

A Three-Dimension Expression of Vague Set and Similarity Measure

CAI Li-Jing LV Ze-Hua LI Fan
(College of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074)

Abstract A new expression of vague sets is given. Based on the reference [3,4], we discuss the definition of intersection and union and some properties of vague set again, then similarity measure and examples are presented.

Keywords Vague set, Intersection, Union, Truth/false-membership function, Similarity measure

Gau 和 Buehrer 于1993年提出了一个新的处理模糊信息的模糊理论——Vague 集[1,2]。与 Fuzzy 集[3]相比较，Fuzzy 集不能表示的模糊信息 Vague 集也能表示。本文首先提出一种新的 Vague 集的三维表示方法，在此基础上，给出了 Vague 集的若干性质及交并运算规则，然后根据 Vague 集的三维表示方法，对上述性质和定义进行讨论，最后给出 Vague 集三维表示方法情况下相似度量的算法及运算实例。

1 Vague 集的三维表示

定义1 令 U 是一个点(对象)的空间，其中的任意一个元素用 u 表示，U 中的一个 Vague 集 A 用一个真隶属函数 t_A 和一个假隶属函数 f_A 表示，$t_A(u)$ 是从支持 u 的证据所导出的 u 的隶属度下界，$f_A(u)$ 则是从反对 u 的证据所导出的 u 的否定隶属度下界，$t_A(u)$ 和 $f_A(u)$ 将区间[0,1]中的一个实数与 U 中的每一个点联系起来，即

$t_A: U\rightarrow[0,1]$,

$f_A: U\rightarrow[0,1]$。

其中，$t_A(u)+f_A(u)\leqslant 1$。

对于论域 U 上的 Vague 集 A 我们可以用图1的形式来描述。

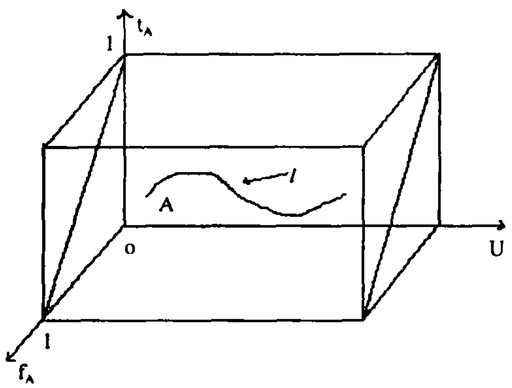

图1 Vague 集的三维表示

图1中的空间曲线 l 为 Vague 集 A 的隶属函数，其参数方程为：

$$\begin{cases} t_A(u)=\varphi_1(t), \\ f_A(u)=\varphi_2(t), \quad f_A+t_A\leqslant 1 \\ u=\varphi_3(t), \end{cases}$$

空间曲线 l 在平面 f_AOU 上的投影为曲线 l_{f_AOU}，其曲线方程为：$F(f_A,u)=0$；空间曲线 l 在平面 t_AOU 上的投影为曲线 l_{t_AOU}，其曲线方程为：$G(t_A,u)=0$。空间曲线 l 也可表示为上述两个投影曲面的相交：

$$\begin{cases} F(f_A,u)=0, \\ G(t_A,u)=0, \end{cases} \quad f_A+t_A\leqslant 1$$

从图1中可以看出，用空间曲线 l 表示 Vague 集 A 的隶属函数，可以更直观地反映 Vague 集 A 所包含的模糊信息。对论域 U 中的任意一点 u，其隶属于 Vague 集 A 的程度为 $t_A(u)$，其不隶属于 Vague 集 A 的程度为 $f_A(u)$，对应于空间曲线 l 上点的坐标就是$(t_A(u),f_A(u),u)$，设该点到平面 $f_A+t_A=1$的距离为 D，D 值越小表示对于论域 U 中的点 u 的信息知道得越精确，反之，则表示对于论域 U 中的点 u 的信息知道得越模糊；如果空间曲线 l 上的任意一点均在平面 $f_A+t_A=1$上，则该 Vague 集就退化为 Fuzzy 集。因此也可以将这种 Vague 集看作是 Fuzzy 集的三维空间扩展。

设 A 为一Vague 集，当 U 是连续的时候，可将 A 表示为如下形式：

$$A=\int_U[t(u),f(u),u] \quad u\in U,$$

当 U 为离散的时候，则可将 A 表示为如下形式：

$$A=\sum_{i=1}^{n}[t_A(u_i),f_A(u_i),u_i] \quad u_i\in \mathrm{U}$$

2 Vague 集的运算规则及性质

定义2 一个 Vague 集是空的，当且仅当它的真隶属度和假隶属度在 U 上恒等于0。

定义3 一个 Vague 集 A 的补集 $\bar{A}$ 定义为：

$t_{\bar{A}}(u)=f_A(u)$

$f_{\bar{A}}(u)=t_A(u)$

根据定义1知道 Vague 集 A 和补集 $\bar{A}$ 的隶属函数是两条关于平面 $t_A=f_A$ 对称的三维曲线。

定义4 Vague 集 A 为 B 所包含，即 $A\subseteq B$，当且仅当对于论域 U 上的任意一点 u 都有：

$t_A(u)\leqslant t_B(u)$

$f_A(u)\geqslant f_B(u)$

图2给出了上式的几何解释，其中点$(t_B(u),f_B(u),u)$在

*)本文得到国家高性能计算基金项目资助(00303)。

点$(t_A(u), f_A(u), u)$的右下方。

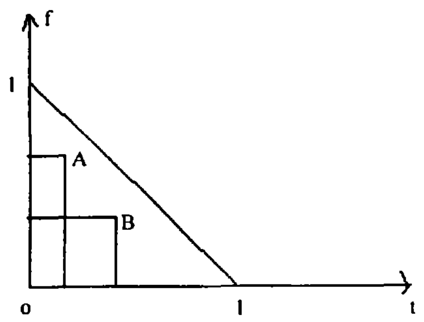

图2 Vague 集 A 为 B 所包含

定义5 两个 Vague 集 A 和 B 是相等的，即 A=B，当且仅当 $A\subseteq B$ 和 $A\supseteq B$，即对于论域 U 上的任意一点 u 有：

$t_A(u)=t_B(u) \quad f_A(u)=f_B(u)$

定义6 两个 Vague 集 A 和 B 的并集是 Vague 集 C，即 $C=A \underline{\cup} B$，其真/假隶属函数分别为：

$t_C=t_A\vee t_B$，

$f_C=f_A\wedge f_B$。

定义7 两个 Vague 集 A 和 B 的交集是 Vague 集 C，即 $C=A \overline{\cap} B$，其真/假隶属函数分别为：

$t_C=t_A\wedge t_B$，

$f_C=f_A\vee f_B$。

定义6和定义7中的"∧"和"∨"分别为取小和取大算子，当然也可以选用其他的 T-范数和 T-余范数来分别代替它们。

例1 A=[0.2,0.6,u_1]+[0.6,0.2,u_2]+[0.3,0.3,u_3]+[0.5,0.1,u_4]+[0.8,0,u_5]

B=[0.3,0.5,u_1]+[0.2,0.5,u_2]+[0.3,0.4,u_3]+[0.8,0.1,u_4]+[1.0,0,u_5]

则有

$A \overline{\cap} B$=[0.2,0.6,u_1]+[0.2,0.5,u_2]+[0.3,0.4,u_3]+[0.5,0.1,u_4]+[0.8,0,u_5]

$A \underline{\cup} B$=[0.3,0.5,u_1]+[0.6,0.2,u_2]+[0.3,0.3,u_3]+[0.8,0.1,u_4]+[1.0,0,u_5]

定义8 一个 Vague 集 A 为凸 Vague 集，当且仅当：

对于 $F(f_A,u)=0$，满足：$f_A(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\leqslant\max(f_A(u_1),f_A(u_2))$

对于 $G(t_A,u)=0$，满足：$t_A(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\min(t_A(u_1),t_A(u_2))$

定义9 论域 U 上的一个 Vague 集 A，$A=\sum_{i=1}^{n}[t_A(u_i), f_A(u_i), f_A(u_i), u_i]$，如果$\exists\, u_i\in U$，有

$t_A(u_i)=1, f_A(u_i)=0$，

则称 A 是正规的 Vague 集。

定义10 Vague 集 A 和 B 相加所得到的和 C 仍然是一个 Vague 集，写作 $C=A\oplus B$，它的真/假隶属函数分别为：

$t_C(z)=\bigvee_{z=x+y}(t_A(x)\wedge t_B(y))$，

$f_C(z)=\bigvee_{z=x+y}(f_A(x)\wedge f_B(y))$。

定义11 Vague 集 A 和 B 的差 C 仍然是一个 Vague 集，写作 $C=A-B$，它的真/假隶属函数分别为：

$t_C(z)=\bigvee_{z=x-y}(t_A(x)\wedge t_B(y))$，

$f_C(z)=\bigvee_{z=x-y}(f_A(x)\wedge f_B(y))$。

定义12 Vague 集 A 和 B 的积 C 仍然是一个 Vague 集，写作 $C=A\otimes B$，它的真/假隶属函数分别为：

$t_C(z)=\bigvee_{z=xy}(t_A(x)\wedge t_B(y))$，

$f_C(z)=\bigvee_{z=xy}(f_A(x)\wedge f_B(y))$。

定义13 Vague 集 A 和 B 相除所得到的商 C 仍然是一个 Vague 集，写作 $C=A/B$，它的真/假隶属函数分别为：

$t_C(z)=\bigvee_{z=x/y}(t_A(x)\wedge t_B(y))$，

$f_C(z)=\bigvee_{z=x/y}(f_A(x)\wedge f_B(y))$。

3 两个 Vague 集的相似度量

定义14 假定 A 和 B 为论域 U 上的两个 Vague 集，A 和 B 的隶属函数之间的相似程度为：

$$S(A,B)=1-\frac{\int\frac{|f_A(u)-f_B(u)|+|t_A(u)-t_B(u)|}{2}du}{\int du}$$

其中 $t_A(u)$，$t_B(u)$，$f_B(u)$分别表示论域 U 中的任意一点 u 对于 Vague 集 A 和 B 的隶属度真值和假值。$S(A,B)$的值越小表示 Vague 集 A 和 B 之间的相似程度越大。

如果 Vague 集 A 和 B 完全相等，即 A=B，则根据定义14，我们可以得到：

$$S(A,B)=1-\frac{\int\frac{|f_A(u)-f_B(u)|+|t_A(u)-t_B(u)|}{2}du}{\int du}=1$$

例2 设 A 和 B 是论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$上的两个 Vague 集，其中

A=[0.4,0.6,u_1],+[0.3,0.3,u_2]+[0.5,0.3,u_3]+[0.7,0.1,u_4]+[0.8,0,u_5],

B=[0.3,0.5,u_1]+[0.4,0.4,u_2]+[0.4,0.2,u_3]+[0.7,0.1,u_4]+[0.9,0.1,u_5],

则有

$$S(A,B)=1-\frac{\int\frac{|f_A(u)-f_B(u)|+|t_A(u)-t_B(u)|}{2}du}{\int du}$$

$$=1-[(0.1+0.1)/2+(0.1+0.1)/2+(0.1+0.1)/2+(0+0)/2+(0.1+0.1)/2]/5$$

$$=1-0.08=0.92$$

结论 本文给出了 Vague 集的一种新的三维表示方法，在此基础上，对文[4,5]提出的 Vague 集定义和运算规则进行了进一步的讨论和分析，同时提出了一种新的相似度量算法。上述讨论和研究说明，Vague 集的三维表示方法能够更直观清晰地反映 Vague 集的性质，为 Vague 集在智能系统中的进一步研究和应用提供了一种新的思路和方法。

参考文献

1 Gau Wen-Lung, Danied J B. Vague Sets. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 610～614

2 李凡. 模糊信息处理系统. 北京:北京大学出版社,1998

3 Zadeh L A. Fuzzy sets. Internation and Control,1965,8(3):338～353

4 李凡,徐章艳,饶勇. Vague 集. 计算机科学,2000,27(9):12～14

5 李凡,卢安,饶勇. Vague 集的运算规则. 计算机科学,2000,27(9):15～17