

# 基于压缩感知的步长自适应前向后向追踪重建算法

蔡 旭 谢正光 蒋小燕 黄宏伟

(南通大学电子信息学院 南通 226019)

**摘 要** 压缩感知(CS)是一种新的信号采样、处理和恢复理论,能够显著地降低高频窄带信号的采样频率。针对稀疏度未知信号的重建,提出了步长自适应前向后向追踪(AFBP)算法。不同于固定步长前向后向追踪(FBP)算法,AFBP的步长可变。它利用一种自适应阈值的方法选取前向步长,然后对候选支撑集进行正则化处理以保证其可靠性,接着用自适应阈值与变步长双向控制的方法选取后向步长以减少重建时间。AFBP能够自适应后向删除估计支撑集中部分错误索引以提高信号准确重建概率。在稀疏信号非零值服从常见分布条件下,用AFBP、FBP等算法进行重建的结果表明,AFBP的准确重建概率、重建精度与FBP相当,重建时间明显少于FBP,能够更高效地重建稀疏度未知信号。

**关键词** 压缩感知,稀疏信号重建,贪婪算法,稀疏度自适应,前向后向更新,步长自适应

**中图分类号** TN911.73 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.11.033

## Adaptive Step Length Forward-backward Pursuit Algorithm for Signal Reconstruction Based on Compressed Sensing

CAI Xu XIE Zheng-guang JIANG Xiao-yan HUANG Hong-wei

(School of Electronics and Information, Nantong University, Nantong 226019, China)

**Abstract** Compressed sensing (CS) is a new theory of signal sampling, processing and recovering, which can significantly reduce the sampling frequency of signal with high frequency and narrow band. Aiming at reconstructing signals with unknown sparsity, we proposed a novel signal reconstruction algorithm called the adaptive forward-backward pursuit (AFBP). Unlike the Forward-backward Pursuit algorithm with fixed step length, AFBP works with varied step length. It utilizes an adaptive thresholding method to adaptively choose the forward step length and conducts the regularization process towards the candidate support estimate to ensure its reliability. We adopted a method which combines the adaptive thresholding and the variable step length afterwards to decide the backward step length in order to reduce the necessary reconstruction time. Some incorrect indexes included in the support estimate can be deleted adaptively in order to improve the exact reconstruction rate. The AFBP reconstruction experiment was conducted including recovery of random sparse signals with common nonzero coefficient distributions. The results demonstrate that AFBP and FBP contribute to similar exact reconstruction rate as well as similar reconstruction error, while the reconstruction time of AFBP is sharply shorter than that of FBP. So AFBP can realize more efficient reconstruction of sparse signals with unknown sparsity than FBP.

**Keywords** Compressed sensing, Sparse signal reconstruction, Greedy algorithm, Sparsity adaptive, Forward-backward search, Step length adaptive

### 1 引言

近年来压缩感知(CS)<sup>[1-3]</sup>越来越受到关注,该理论在获取信号的同时对信号进行适当压缩,最终实现对稀疏信号或可压缩信号的高效重建。传统采样方式必须遵循奈奎斯特采样定理,先采样后压缩,对高频信号的采样数据量大,导致对采样元、时间和存储空间的浪费。相比之下,压缩感知理论针对可稀疏表示的信号,能够将数据的采样和压缩过程合二为一,

因此该理论在信号处理领域有着突出优点和广阔应用前景。

假设实信号  $x \in R^N$  中有  $S$  个非零值,或者  $x$  在某个正交基  $\psi$  的稀疏表示  $\theta$  中有  $S$  个非零值,  $\theta = \psi^T x$ , 即  $x$  的稀疏度为  $S$ , 其中,  $S \ll N$ 。采用一个与正交基  $\psi$  不相关的测量矩阵  $\Phi$  对信号  $x$  进行压缩采样得到测量向量  $y$ ,  $y = \Phi\theta$ , 其中,  $\Phi \in R^{M \times N}$ ,  $S < M < N$ , 可将信号  $x$  从  $N$  维降到  $M$  维, 同时又能保留其中的重要信息。CS重建问题旨在从  $y$  中恢复出  $x$ , 由于

到稿日期:2014-01-12 返修日期:2014-03-09 本文受国家自然科学基金面上项目(61171077),南通大学研究生科技创新计划项目(YKC13003)资助。

蔡旭(1990-),男,硕士生,主要研究方向为数字图像处理;谢正光(1967-),男,博士,教授,主要研究方向为智能信息处理、图像视频信号处理与传输;蒋小燕(1989-),女,硕士生,主要研究方向为信号处理;黄宏伟(1989-),男,硕士生,主要研究方向为信号处理。

$M < N$ , 这是个病态问题, 但是 Candes<sup>[1]</sup> 和 Donoho<sup>[2]</sup> 指出, 如果  $x$  足够稀疏, 即  $x$  中只有非常有限的非零元素, 则可以利用一些非线性凸优化方法, 如基追踪 (BP) 算法<sup>[4]</sup>, 进行  $M=O(S \log(N/S))$  次测量便可以高精度恢复  $x$ 。但是, BP 算法的复杂度相当高, 这极大地约束了它的实际应用。贪婪类算法因结构简单、运算量小而愈发得到重视, 其中最具有代表性的贪婪算法包括: 正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 算法<sup>[5]</sup>、正则化正交匹配追踪 (Regularized OMP, ROMP) 算法<sup>[6]</sup>、分段正交匹配追踪 (Stagewise OMP, StOMP) 算法<sup>[7]</sup>、子空间追踪 (Subspace Pursuit, SP) 算法<sup>[8]</sup>、压缩采样匹配追踪 (Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP) 算法<sup>[9]</sup> 以及稀疏度自适应匹配追踪 (Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP) 算法<sup>[10]</sup>, 它们均采用贪婪迭代的机制逐步逼近原稀疏信号, 复杂度远远低于 BP 算法。文献<sup>[11]</sup> 概括出 SP 以及 CoSaMP 算法的二级阈值结构 (Two Stage Thresholding, TST), 这是在贪婪迭代机制上的一种发展。SAMP 运用自适应的方法估计原信号稀疏度, 为稀疏度未知信号的重建提供了新的思路。文献<sup>[12]</sup> 提供的一种新的自适应空间匹配追踪算法 (Adaptive Space Orthogonal Matching Pursuit, ASOMP) 引入正则化自适应和空间匹配的原则, 实现了原信号的精确重建。文献<sup>[13]</sup> 在 TST 的基础上, 提出了前向后向追踪 (Forward-backward Pursuit, FBP) 算法用以实现对稀疏度未知信号的重建, 分别利用固定的前向选择步长  $\alpha$  和后向删除步长  $\beta$  扩充和缩减对  $x$  支撑集的估计, 不断循环直到残差能量足够小。当稀疏信号非零值的幅值差异明显时, FBP 算法准确重建的概率比 SP、OMP 以及 BP 算法高, 但是重建时间较长。为了缩短重建时间, 在 FBP 算法的基础上, 本文提出了步长自适应前向后向追踪 (Adaptive Forward-backward Pursuit, AFBP) 算法, 根据稀疏信号种类与稀疏度  $S$  自适应选择步长。仿真结果表明, AFBP 算法能在不牺牲 FBP 准确重建概率和重建精度的前提下明显缩短重建时间, 是一种更高效的稀疏度自适应贪婪算法。

## 2 FBP 重建算法

文献<sup>[13]</sup> 提出的 FBP 算法是一种二级迭代算法。在第一级中, 选出与残差最相关的  $\alpha$  个字典原子, 在估计支撑集中添加这  $\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) 个原子的索引, 称  $\alpha$  为前向步长, 计算测量向量  $y$  在估计支撑集索引对应原子张成子空间的正交投影。在第二级迭代中, 从估计支撑集中删除幅值最小的  $\beta$  ( $\beta < \alpha$ ) 个投影系数的索引, 称  $\beta$  为后向步长。最后, 再次将残差投影到新的估计支撑集对应原子组成的子空间中, 更新残差并保证残差与该子空间的正交。按照上述过程不断重复估计支撑集的前向和后向更新, 直到残差能量小于既定的阈值或者迭代次数达到最大, 跳出循环, 由最终的估计支撑集得出对原信号的估计值。算法 1 给出了 FBP 算法的伪代码。

### 算法 1 FBP 算法

输入:  $M \times N$  测量矩阵  $\Phi$ ,  $M$  维测量向量  $y$ ;  
 设定: 前向步长  $\alpha$ , 后向步长  $\beta$ , 最大迭代次数  $k_{\max}$ , 迭代终止阈值  $\epsilon$ ;  
 初始化: 估计支撑集  $T^0 = \emptyset$ , 残差  $r^0 = y$ , 迭代次数  $k = 0$ ;  
 迭代终止条件:  $\|r^k\|_2 \leq \epsilon \|y\|_2$  或  $|T^k| \geq k_{\max}$   
 循环执行:  
 $k = k + 1$

前向更新:  $T_i = \underset{j: |j| = \alpha}{\operatorname{argmax}} \|\Phi_j^* r^{k-1}\|_1$   
 $\hat{T}^k = T^{k-1} \cup T_i$   
 $w = \underset{w}{\operatorname{argmin}} \|y - \Phi_{\hat{T}^k} w\|_2$   
 后向更新:  $T_b = \underset{j: |j| = \beta}{\operatorname{argmin}} \|w_j\|_1$   
 $T^k = \hat{T}^k - T_b$   
 投影:  $w = \underset{w}{\operatorname{argmin}} \|y - \Phi_{T^k} w\|_2$   
 $r^k = y - \Phi_{T^k} w$   
 直到满足迭代终止条件  
 迭代终止后令  $\hat{x} = 0$ ,  $\hat{x}_{T_k} = w$ , 输出  $\hat{x}$

在实验部分, FBP 比较不同前向步长  $\alpha$  和后向步长  $\beta$  对应的相变曲线、准确重建概率曲线、平均标准均方误差曲线以及平均运行时间曲线<sup>[13]</sup>, 得出结论: 1) 当原稀疏信号非零值幅值差异明显, 如非零值服从于高斯分布或者均匀分布时, FBP 的准确重建概率比 OMP, SP 以及 BP 高; 2) 对于 FBP, 固定  $\beta = \alpha - 1$ , 准确重建概率和重建时间随  $\alpha$  的增大而增加; 3) 当  $\alpha \in [0.2M, 0.3M]$ ,  $\beta = \alpha - 1$  时, FBP 的准确重建概率和重建精度较高, 总体重建效果好。若减小  $\alpha$  或  $\beta$ , FBP 重建时间减少, 准确重建概率有所下降。然而, 因为每次迭代的实际步长  $\gamma = \alpha - \beta$  固定, 当  $\gamma$  取值较小时, 虽然准确重建概率高, 但是重建时间明显增加, 算法执行效率不高。为了让  $\gamma$  更好地适应原信号的稀疏度  $S$ , 在保证准确重建概率的前提下缩短重建时间, 本文提出  $\gamma$  可变的 AFBP 算法。

## 3 AFBP 算法

### 3.1 基本思想

AFBP 算法的基本框架与 FBP 相似, 在每次迭代中, 首先用自适应阈值和正则化思想设置前向步长  $\alpha$  并扩充估计支撑集, 计算出测量向量  $y$  在估计支撑集原子张成子空间的正交投影。然后用自适应阈值和变步长双向控制的方法决定后向步长  $\beta$ , 删除正交投影中幅值最小的  $\beta$  个系数所对应的索引, 计算新的投影系数并更新残差。正常情况下, 残差能量随着迭代次数增加而减小, 直到收敛到极小值  $\epsilon$ 。但是, 当信号稀疏度较大时, 在经过有限次的迭代后, 估计支撑集在很大程度上包含较多错误原子, 导致第  $k$  次迭代相比于第  $k-1$  次迭代的残差能量增加, 准确重建概率大幅降低。针对这种情况, AFBP 执行后向删除步骤, 计算阈值并删除估计支撑集中的部分索引, 从此时直到迭代终止, 采用另一种更加保守的  $\beta$  选择方法, 继续迭代直到满足迭代终止条件。

### 3.2 算法步骤与分析

AFBP 的步骤如算法 2 所示, 其中, 对于集合  $x$ ,  $x(i)$  表示  $x$  中的第  $i$  个元素,  $|x|$  表示  $x$  中元素个数, 称为  $x$  的大小。对于任意实数  $x$ , 用  $\operatorname{round}(x)$  对  $x$  进行四舍五入取整。

#### 算法 2 AFBP 算法

输入:  $M \times N$  测量矩阵  $\Phi$ ,  $M$  维测量向量  $y$ , 最大迭代次数  $k_{\max}$ , 迭代终止阈值  $\epsilon$ ;  
 初始化: 迭代次数  $k = 0$ , 残差  $r^0 = y$ , 残差能量  $E^0 = 1$ , 估计支撑集  $\Lambda^0 = \emptyset$ , 信号非零值估计  $\tilde{x}^0 = \emptyset$ , 后向删除标志  $\operatorname{sign} = 0$ ;  
 迭代终止条件:  $E^k \leq 10^{-6}$  或  $|\Lambda^k| \geq k_{\max}$ ;  
 循环执行:  
 $k = k + 1$   
 1) 后向删除: 如果  $k \geq 3$ ,  $E^{k-1} > E^{k-2}$  且  $\operatorname{sign} = 0$ , 找出索引集  $D$ , 使得  $|\tilde{x}_D^{k-2}| \geq \operatorname{mean} |\tilde{x}^{k-2}|$ , 令  $\Lambda^{k-1} = \Lambda_D^{k-2}$ ,  $\operatorname{sign} = 1$ ,  $r^{k-1} = y - \Phi_{\Lambda^{k-1}} \Phi_{\Lambda^{k-1}}^\dagger \Phi_{\Lambda^{k-1}} y$ ,  $E^{k-1} = \|r^{k-1}\|_2 / \|y\|_2$ ;

2)前向更新:计算相关值  $V^k = (\Phi^T)^* r^{k-1}$ , 选定索引集  $H$ , 使  $|V_{H(1)}^k| \geq |V_{H(2)}^k| \geq \dots \geq |V_{H(N)}^k|$ , 计算前向阈值  $\mu_1 = 1 - (\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |V_{H(i)}^k|) / |V_{H(1)}^k|$ , 选择前向候选支撑集  $C_f$  使  $|V_{C_f}^k| \geq \mu_1 \cdot |V_{H(1)}^k|$ , 令  $\alpha_0^k = \min(|C_f|, M - |\Lambda^{k-1}|)$ , 更新  $C_f = H(1; \alpha_0^k)$  并进行正则化处理: 令  $u = V^k$ , 根据  $|u(i)| \leq 2|u(j)|, i, j \in C_f$ , 将  $C_f$  中索引值对应原子与残差的相关值分为若干组, 选择能量最大的一组相关值对应原子的索引放入前向集  $\Lambda_f$ , 前向步长  $\alpha^k = |\Lambda_f|$ , 前向更新估计支撑集  $\hat{\Lambda}^k = \{\Lambda^{k-1} \cup \Lambda_f\}$ ,  $x_{\hat{\Lambda}^k} = \operatorname{argmin}_x \|y - \Phi_{\hat{\Lambda}^k} x\|_2$ ;

3)后向更新:对  $x_{\hat{\Lambda}^k}$  各元素按幅值大小升序排列得到  $x_{\hat{\Lambda}^k}$  以及对应的估计支撑集  $\Lambda^k$ , 如果  $\operatorname{sign} = 1$ , 利用自适应阈值法设定后向阈值  $\mu_2 = 1 - ((\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |x_{\hat{\Lambda}^k}(i)|) / |x_{\hat{\Lambda}^k}(L)|)^2, L = |\hat{\Lambda}^k|$ , 选择集合  $D$  使  $|x_{\hat{\Lambda}^k}(D)| \leq \mu_2 \cdot |x_{\hat{\Lambda}^k}(\alpha^k)|$ , 令后向步长  $\beta^k = |D|$ ; 如果  $\operatorname{sign} = 0$ , 自适应阈值法选取  $\beta_1^k$  和变步长法选取  $\beta_2^k$ , 分别见 I, II:

I. 设定后向阈值  $\mu_3 = 1 - ((\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |x_{\hat{\Lambda}^k}(i)|) / |x_{\hat{\Lambda}^k}(L)|)^2, L = |\hat{\Lambda}^k|$ , 选择集合  $D$  使  $|x_{\hat{\Lambda}^k}(D)| \leq \mu_3 \cdot |x_{\hat{\Lambda}^k}(\alpha^k)|$ , 令  $\beta^k = |D|$ ;

II. 当迭代次数  $k < 3$  时, 令实际步长  $\gamma^k = 8 - 2 * k, \beta_1^k = \max(0, \alpha^k - \gamma^k)$ ; 当  $k \geq 3$  时, 令  $\gamma_0^k = \operatorname{round}[(E^{k-2} - E^{k-1}) * \alpha^k]$ ,  $\gamma^k = \min(\alpha^k, \max(\gamma_0^k, 1))$ ,  $\beta_2^k = \alpha^k - \gamma^k$ ;

后向步长  $\beta^k = \min(\beta_1^k, \beta_2^k)$

令后向集  $\Lambda_b = \Lambda^k(1; \beta^k)$ , 更新估计支撑集  $\Lambda^k = \hat{\Lambda}^k - \Lambda_b, \bar{x}^k = \operatorname{argmin}_x \|y - \Phi_{\Lambda^k} x\|_2$ , 残差  $r^k = y - \Phi_{\Lambda^k} \bar{x}^k, E^k = \|r^k\|_2 / \|y\|_2$ ;

直到满足迭代终止条件

停止循环, 令原信号估计  $\hat{x} = 0, x_{\hat{\Lambda}^k} = \bar{x}^k$ , 输出  $\hat{x}$

在前向更新中, 用一种自适应阈值的方法根据残差  $r^{k-1}$  和测量矩阵  $\Phi$  得出阈值  $\mu_1$ , 再通过  $\mu_1$  确定前向步长  $\alpha_0^k$ , 从而得出相关值中幅值最大的  $\alpha_0^k$  个值对应的索引形成前向候选支撑集  $C_f$ .  $\mu_1$  ( $\mu_1 \in [0, 1]$ ) 能够简单估计原信号稀疏度大小, 它体现了测量矩阵对应的各原子与残差的相关值中, 最大幅值与平均幅值的关系。因为原信号支撑集所对应原子与残差相关值的幅值明显大于非支撑集索引所对应的相关值幅值, 当  $\mu_1 > 0.5$  时, 说明大部分相关值幅值明显小于最大相关值幅值, 支撑集索引数较小, 即稀疏度  $S$  较小, 故设置的前向步长  $\alpha_0^k$  较小; 相反, 当  $\mu_1 < 0.5$  时, 说明大部分相关值幅值与最大相关值幅值大小相近,  $S$  相对较大, 故选定较大的前向步长  $\alpha_0^k$ 。

随后, 本文采用正则化方法对前向候选支撑集  $C_f$  进行筛选。这是因为, 贪婪算法的目的是找到稀疏信号真实支撑集索引所对应的  $S$  个原子使测量向量  $y$  在各个原子上的投影幅值最大。在理想情况下, 当前迭代选出的原子对信号的估计分量幅值比之前已选原子对应的分量幅值小。如果当前选出的原子使部分已选原子对原信号的估计分量幅值大幅度减小, 在一定程度上说明这部分已选原子是错误的。正则化思想可以保证候选支撑集对应的各原子对原信号的估计分量幅值相当, 在每次迭代时消除幅值很小的估计分量所对应的候选支撑集索引, 从而能以高概率保证正则化处理后的候选支撑集的正确性。对  $C_f$  进行正则化处理后的前向支撑集  $\Lambda_f$  大小为实际的前向步长  $\alpha^k$ , 将  $\Lambda_f$  添加到已选估计支撑集  $\Lambda^{k-1}$  中得到候选支撑集  $\hat{\Lambda}^k$ 。

在后向更新中, 本文采用了自适应阈值与变步长双向控

制的方法确定后向步长  $\beta^k$  并执行对候选支撑集的删减处理, 这里的自适应阈值法与选取前向步长  $\alpha_0^k$  时的自适应阈值法相似, 待删除索引根据候选支撑集  $\hat{\Lambda}^k$  对应原子对原信号估计向量中幅值较小分量的索引来确定。阈值  $\mu_3$  ( $\mu_3 \in [0, 1]$ ) 体现了测量向量  $y$  在  $\hat{\Lambda}^k$  对应原子所拉成子空间的各投影分量幅值中最小值与平均值的关系, 在一定程度上反映了  $\hat{\Lambda}^k$  中错误索引的多少。当  $\mu_3 > 0.5$  时, 说明大部分投影分量幅值都比最大投影分量幅值小很多, 即它们更接近于最小投影分量,  $\hat{\Lambda}^k$  中多数索引是错误的, 故对应的后向步长  $\beta^k$  较大以删除较多的索引; 相反, 当  $\mu_3 < 0.5$  时, 大部分投影分量幅值比最小投影分量幅值要大很多, 相对而言,  $\hat{\Lambda}^k$  中错误的索引较少, 故设置较小的后向步长  $\beta^k$  并删除较少索引。此外, 在相同条件下, 相对于重建非零值幅值差异较大信号, 在重建非零值幅值差异较小的稀疏信号时, 利用该自适应阈值法得出的后向步长更小, 有利于缩短重建时间。由文献[13]可以得出: 1) 当信号稀疏度  $S$  较小时, 重建相对容易, 即使实际步长较大, 信号准确重建概率仍然很高; 2) 当信号稀疏度  $S$  较大时, 重建相对困难, 必须令实际步长很小以保证重建精度; 3) 随着迭代次数增加, 相邻两次迭代所得残差能量逐渐减小, 直到趋近于 0。根据以上经验, 用变步长法选取后向步长  $\beta^k$ , 构造实际步长  $\gamma^k$  与前向步长  $\alpha^k$  的比例关系, 用前两次迭代的残差能量  $E^{k-2}$  与  $E^{k-1}$  的差值与  $\alpha^k$  的乘积来决定  $\gamma^k$ , 且  $1 \leq \gamma^k \leq \alpha^k$ 。由此得出的实际步长在迭代初期较大, 随后逐渐减小, 到残差很小时恒为 1, 这既能保证小稀疏度信号的重建速度, 又能保证大稀疏度信号的准确重建概率。确定  $\gamma^k$  后, 令  $\beta_1^k = \alpha^k - \gamma^k$ , 综合两种后向步长选取结果, 令后向步长  $\beta^k = \min(\beta_1^k, \beta_2^k)$ , 以缩短重建时间。

正常情况下, 随着迭代次数的增加, 残差能量逐渐减小。可是当信号稀疏度  $S$  较大时, 在迭代过程中, 已选支撑集中包含了较多错误索引, 导致当前残差能量比前一步大, 这导致准确重建概率和重建精度很差。针对这种情况, AFBP 执行了后向删除步骤, 计算阈值并删除前次迭代已选支撑集中的部分索引元素。在后向更新时, 采用一种更加保守的后向步长选择方法, 仅仅利用自适应阈值的方法确定后向步长  $\beta^k$ , 从而使  $\beta^k$  更大, 这实际上是牺牲重建时间来提高重建概率, 准确重建概率得到改善。

## 4 实验仿真

### 4.1 对一维信号的重建

本文在 MATLAB 仿真平台上用 AFBP、FBP、BP、SP 以及 OMP 算法对常用一维稀疏信号(高斯稀疏信号、均匀稀疏分布信号以及二进制稀疏信号)进行了重建。其中, 高斯稀疏信号的非零值服从标准高斯分布, 均匀稀疏信号的非零值均匀分布于  $[-1, 1]$ , 二进制稀疏信号的非零值取 1, 测量矩阵  $\Phi$  的元素服从均值为 0、方差为  $1/N$  的高斯分布。实验参数的设置完全依照文献[13], 待重建信号长度  $N = 256$ , 测量向量长度  $M = 100$ , 信号稀疏度  $S$  在  $[10, 45]$  内变化, AFBP、FBP 以及 OMP 的迭代终止阈值  $\epsilon$  取  $10^{-6}$ , 最大迭代次数  $k_{\max} = 55$ , 每个  $S$  值重复 500 次独立实验, 比较各重建算法对稀疏信号的准确重建概率、平均重建误差以及平均重建时间。其中, 信号准确重建的条件为  $\|x - \hat{x}\|_2 \leq 10^{-2} \|x\|_2$ , 重建误差

用平均归一化最小均方误差 (Average Normalized Mean-squared-error, ANMSE) 表示,  $ANMSE = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \frac{\|x_i - \hat{x}_i\|_2^2}{\|x_i\|_2^2}$ ,

$\hat{x}_i$  表示第  $i$  次实验中对信号向量  $x_i$  的重建向量。

通过高斯稀疏信号的重建实验说明 AFBP 算法自适应选择前向步长  $\alpha$  的合理性, 其中, FBP 的前向步长  $\alpha$  分别取  $[2, 30]$  间的固定值, AFBP 自适应选取  $\alpha$ , 固定 FBP 与 AFBP 的后退步长  $\beta = \alpha - 1$ , 高斯稀疏信号的重建结果如图 1 所示。在文献[13]中, 通过研究 FBP 的实验仿真结果得出, 当  $\alpha \in [0.2M, 0.3M]$ ,  $\beta = \alpha - 1$  时, 总重建效果最好。为了说明 AFBP 后向步长  $\beta$  的选择对重建结果的影响, 同样对高斯稀疏信号进行重建, 分别令 AFBP 以及 FBP 的前向步长  $\alpha = 0.2M$  和  $0.3M$ , 取 FBP 的后向步长  $\beta$  比  $\alpha$  小 1、2、3 和 4 的 4 种情况, AFBP 自适应选取  $\beta$ , 重建结果分别如图 2、图 3 所示。图 4—图 6 则依次展示了 FBP、AFBP 以及其他算法对高斯稀疏信号、均匀稀疏信号以及稀疏二进制 0,1 信号的重建结果。其中, FBP 算法的前向步长  $\alpha$  取不同值, 与图 1 一致。为了保证 FBP 的重建精度, 取 FBP 的  $\beta = \alpha - 1$ , AFBP 自适应选取  $\alpha$  和  $\beta$ 。由于 BP 算法重建时间远远长于上述几种贪婪算法, 因此没有在图 1—图 6 中列出 BP 算法的重建时间曲线。

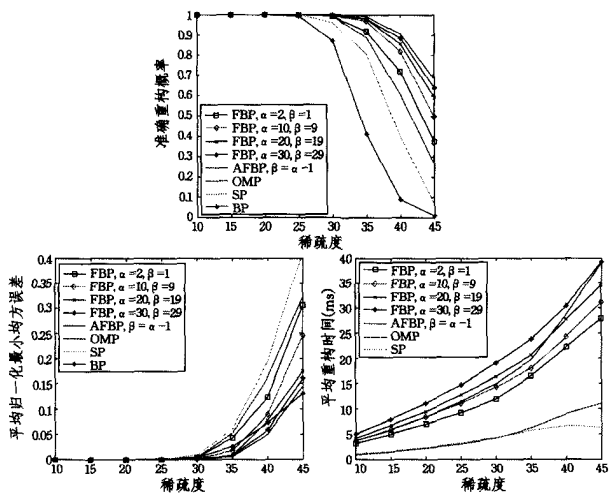


图 1 高斯稀疏信号的重建结果, 对于 FBP 与 AFBP,  $\beta = \alpha - 1$

由图 1 可得, 固定  $\beta = \alpha - 1$ , 无论 FBP 的  $\alpha$  取图中的哪个值, AFBP 的准确重建概率和重建误差均比 FBP 好。当  $S < 40$  时, AFBP 的重建时间小于 FBP,  $\alpha = 20$  的时间; 当  $S \geq 40$  时, AFBP 的重建时间上升加快并逐渐逼近 FBP,  $\alpha = 30$  的时间。由此可以判断 AFBP 的自适应  $\alpha$  选择方法对  $S$  的适应性更好, 比 FBP 固定  $\alpha$  的方法更加合理。

在图 2 和图 3 中, 分别固定 FBP 与 AFBP 的前向步长  $\alpha = 0.2M$  和  $\alpha = 0.3M$ , FBP,  $\beta = \alpha - 1$  与 AFBP 的准确重建概率与重建误差相近。图 2 中, AFBP 与 FBP,  $\beta = \alpha - 2$  重建时间曲线大致重合。在图 3 中, 当  $S < 25$ , AFBP 与 FBP,  $\beta = \alpha - 4$  的重建时间近似相等; 随着  $S$  的增大, AFBP 的重建时间不断逼近并略微超过  $\beta = \alpha - 2$  时的 FBP 所需重建时间, 明显小于 FBP,  $\beta = \alpha - 1$  所需重建时间。图 2、图 3 都说明, 在重建高斯稀疏信号时, AFBP 的后向步长  $\beta$  选择机制明显缩短了重建时间, 而且能保证准确重建概率以及重建精度不受明显影响。

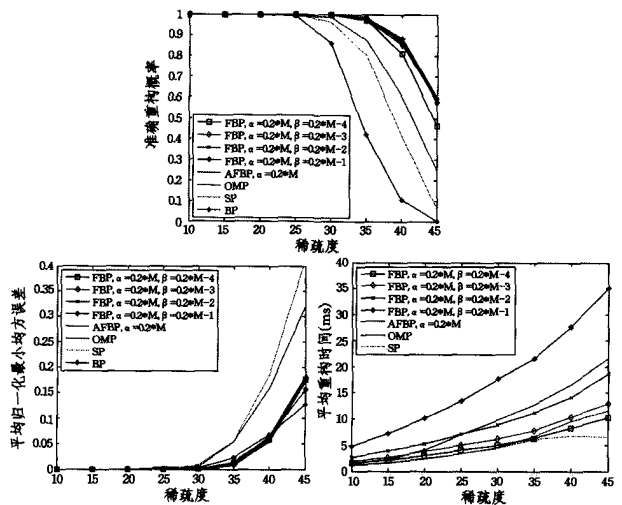


图 2 高斯稀疏信号的重建结果, 对于 FBP 与 AFBP,  $\alpha = 0.2M$

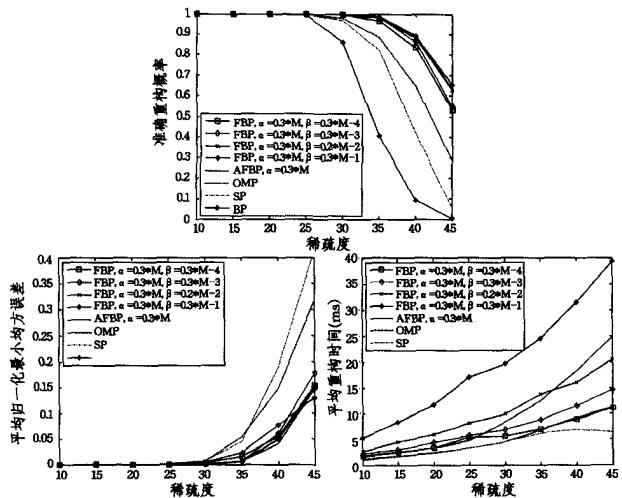


图 3 高斯稀疏信号的重建结果, 对于 FBP 与 AFBP,  $\alpha = 0.3M$

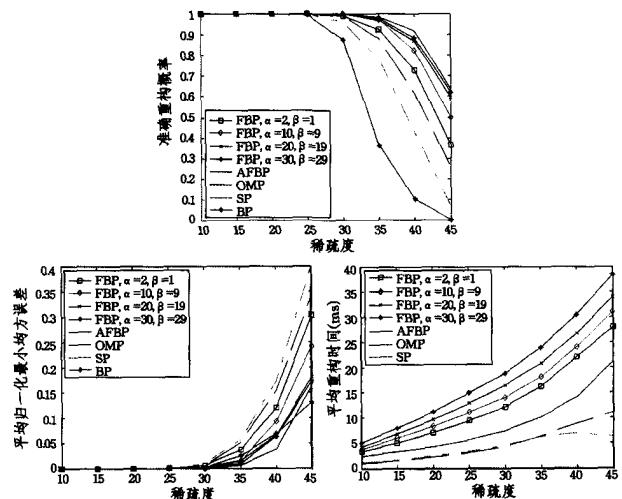


图 4 高斯稀疏信号的重建结果, 对于 AFBP,  $\alpha$  与  $\beta$  自适应, FBP,  $\beta = \alpha - 1$

图 5 表示不同稀疏度  $S$  下, 各算法对均匀分布信号的重建结果, AFBP 的准确重建概率以及重建误差不亚于所有  $\alpha, \beta$  取值下的 FBP, 而所有  $S$  取值下重建时间均比 FBP,  $\alpha = 30$ ,  $\beta = 29$  缩短了一半以上。尤其是当  $S < 35$  时, AFBP 的准确重建概率高于 90%, 重建时间远远小于对应  $S$  值下任何  $\alpha, \beta$  取

值的FBP算法重建时间,这比图4在重建高斯稀疏信号时更接近于OMP算法的重建时间曲线,说明当原稀疏信号的非零值幅度差异较小且S在可准确重建范围内时,利用本文的自适应步长选择方法可以减少重建时间。

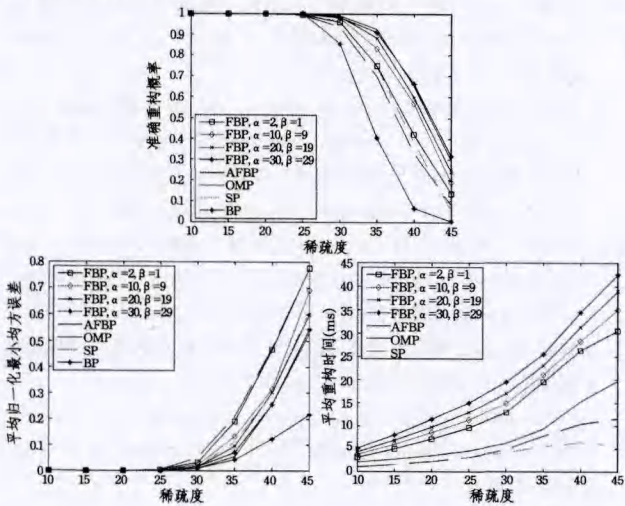


图5 稀疏均匀分布信号的重建结果,对于AFBP,  $\alpha$ 与 $\beta$ 自适应,  $\text{FBP}, \beta = \alpha - 1$

同样地,图6表示在不同稀疏度S下,各算法对二进制0,1信号的重建效果,此时AFBP是贪婪算法中重建效果最好的。当 $S \leq 25$ 时,AFBP的准确重建概率高于80%,比SP、FBP均高,重建误差与SP相当,明显低于FBP。AFBP的重建时间明显小于FBP算法,当 $S \leq 25$ 时,AFBP与OMP的重建时间近似相等,说明在重建稀疏二进制0,1信号时AFBP依然能在重建时间上优于FBP算法,而且能保证在成功重建概率以及重建精度上不亚于包括FBP在内的其它贪婪算法。比较图4—图6中AFBP的重建时间曲线,从高斯稀疏信号到稀疏均匀信号,再到稀疏0,1信号,随着原稀疏信号非零值幅度差异的减小,在保证准确重建概率较高即信号稀疏度S在准确重建范围内时,AFBP与OMP的重建时间曲线差距逐渐缩小,进一步说明当原稀疏信号非零值幅度差异减小时,本文的步长选择方法能有效地缩短重建时间。

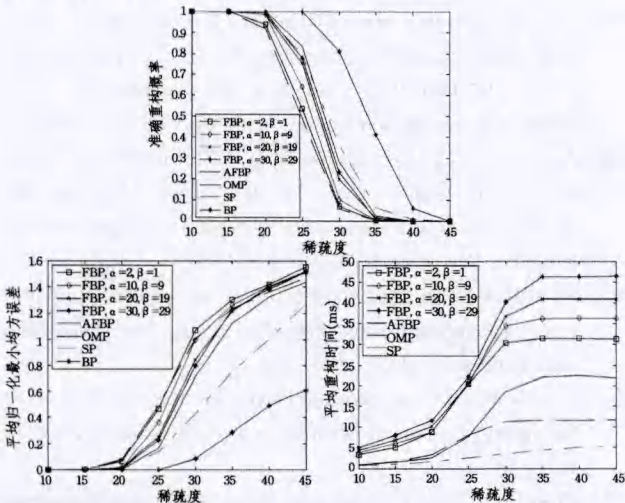


图6 稀疏二进制0,1信号的重建结果,对于AFBP,  $\alpha$ 与 $\beta$ 自适应,  $\text{FBP}, \beta = \alpha - 1$

#### 4.2 对稀疏图像的重建

为了评估AFBP算法对二维信号的效果,采用 $256 \times 256$

的Lena图像作为测试图像,即 $N=256$ ,因为图像经小波变换可变得稀疏,故可先重建出小波系数,然后通过小波反变换重建原图像。实验中,用Symlets小波对原图像进行正交变换,保留小波系数矩阵每列中绝对值最大的S个小波系数,则图像的稀疏度为S,令 $S=48$ 。依次对每列小波系数进行测量和重建,测量矩阵元素服从均值为零、方差为 $1/N$ 的高斯矩阵,测量数 $M=128$ ,FBP与AFBP的最大迭代次数 $k_{\max}$ 取80,迭代终止阈值 $\epsilon=10^{-6}$ 。与文献[13]的二维图像重建类似,取FBP的 $\alpha=0.3M, \beta=\alpha-1$ 以及 $\alpha=0.3M, \beta=\alpha-3$ 两种情况。对二维信号的重建精度用峰值信噪比(Peak Signal-to-noise Ratio, PSNR)值来评定,  $\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left( \frac{255}{\sqrt{\text{MSE}}} \right)$ , 原图像与重建图像的均方误差  $\text{MSE} = \frac{1}{P \times Q} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q (x(p, q) - \hat{x}(p, q))^2$ 。FBP与AFBP算法的重建结果如图7所示。



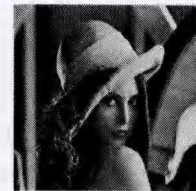
(a) "Lena"



(b)  $\text{FBP}, \alpha=0.3M, \beta=0.3M-3$   
(PSNR=32.10dB, time=6.24s)



(c)  $\text{FBP}, \alpha=0.3M, \beta=0.3M-1$   
(PSNR=32.94dB, time=16.65s)



(d) AFBP  
(PSNR=33.56dB, time=9.66s)

图7 FBP与AFBP对"Lena"图的重建结果

比较图7中各重建图像的PSNR和重建时间time可知,AFBP的重建精度与 $\text{FBP}, \beta = \alpha - 1$ 相当,重建时间明显少于 $\text{FBP}, \beta = \alpha - 1$ ,对图像边沿部分的重建质量较其他区域高。

**结束语** 本文针对FBP算法重建时间较长的问题,在FBP的前向后向更新支撑集的框架下,结合ROMP的正则化思想,提出了一种新的前向后向追踪重建算法AFBP,它能根据原信号种类和稀疏度自适应选择前向步长和后向步长。实验结果表明,当原稀疏信号非零值服从标准高斯分布、均匀分布与二进制0,1分布时,AFBP的准确重建概率与重建精度同FBP相当,明显高于OMP算法;当稀疏信号非零值幅值差异较大时,高于SP, BP算法。在保证FBP与AFBP的准确重建概率与重建精度相当的情况下,AFBP重建时间明显少于FBP算法,当非零值幅度差异较小信号的稀疏度在准确重建范围内时,AFBP能缩短这类信号的重建时间。对二维Lena图像的重建结果表明,AFBP对二维稀疏信号的重建精度与FBP算法相当,重建时间更短。所以,AFBP可以较好地实现对未知稀疏度信号的重建,比FBP拥有更好的应用前景。

#### 参考文献

[1] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles;

- Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2):489-509
- [2] Donoho D. Compressed Sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4):1289-1306
- [3] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*, 2009, 37(5):1070-1081
- [4] Candes E, Tao T. Decoding by Linear Programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12):4203-4215
- [5] Tropp J, Gilbert A. Signal Recovery from Random Measurements via Orthogonal Matching Pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12):4655-4666
- [6] Needell D, Vershynin R. Uniform Uncertainty Principle and Signal Recovery via Regularized Orthogonal Matching Pursuit[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(3):317-334
- [7] Donoho D, Tsai Y, Drori I, et al. Sparse Solution of Underdetermined Systems of Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(2):1094-1121
- [8] Dai W, Milenkovic O. Subspace Pursuit for Compressive Sensing Signal Reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5):2230-2249
- [9] Needell D, Tropp J. CoSaMP; Iterative Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3):301-321
- [10] Do T, Lu G, Nguyen N, et al. Sparsity Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Practical Compressed Sensing[C]// *Pacific Grove. Conference Record of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. California: IEEE, 2008:581-587
- [11] Maleki A, Donoho D. Optimally Tuned Iterative Reconstruction Algorithms for Compressed Sensing[J]. *Selected Topics in Signal Processing*, *IEEE Journal of*, 2010, 4(2):330-341
- [12] 姚远, 梁志毅. 基于压缩感知信号重建的自适应空间正交匹配追踪算法[J]. *计算机科学*, 2012, 39(10):50-53
- [13] Karahanoglu N, Erdogan H. Compressed sensing signal recovery via forward-backward pursuit[J]. *Digital Signal Processing*, 2013, 23(5):1539-1548

(上接第 151 页)

- [15] Martin M, Livshits B, Lam M S. Finding Application Errors and Security Flaws Using PQL: a Program Query Language[C]// *Proceedings of the 20<sup>th</sup> annual ACM SIGPLAN conference on Object-oriented programming, systems, languages, and applications*. New York, USA, 2005:365-383
- [16] Goldsmith S, O'Callahan R, Aiken A. Relational Queries Over Program Traces[C]// *Proceedings of the 20<sup>th</sup> Annual ACM SIGPLAN Conference on Object-oriented Programming, Systems, Languages, And Applications*. New York, USA, 2005:385-402
- [17] Barringer H, Goldberg A, Havelund K, et al. Rule-Based Runtime Verification[C]// *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Verification, Model Checking, and Interpretation (VMCAI 2004)*. Venice, Italy, 2004:44-57
- [18] Barringer H, Rydeheard D, Havelund K. Rule systems for runtime monitoring; from EAGLE to RULER[C]// *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Workshop on Runtime Verification*. Vancouver, Canada, 2007:111-125
- [19] Dwyer M B, Purandare R. Residual dynamic typestate analysis exploiting static analysis; results to reformulate and reduce the cost of dynamic analysis[C]// *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering*. New York, USA, 2007:124-133
- [20] Bodden E, Hendren L, Lhotak O. A staged static program analysis to improve the performance of runtime monitoring[C]// *Proceedings of the 21<sup>st</sup> European conference on Object-Oriented Programming*. Berlin, Germany, 2007:525-549
- [21] Bodden E, Feng Chen, Rosu G. Dependent Advice: A General Approach to Optimizing History-based Aspects[C]// *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Aspect-Oriented Software Development*. Virginia, USA, 2009:3-14
- [22] Bodden E, Lam P, Hendren L. Clara: a Framework for Partially Evaluating Finite-state Runtime Monitors Ahead of Time[C]// *Proceedings of the First International Conference on Runtime Verification*. Julians, Malta, 2010:183-197
- [23] Chen Feng, Jin Dong-yun, Meredith P O, et al. Efficient Formalism-Independent Monitoring of Parametric Properties[C]// *Proceedings of the 2009 IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering*. Washington, USA, 2009:383-394
- [24] Jin Dong-yun, Meredith P O, Lee C, et al. JavaMOP: efficient parametric runtime monitoring framework[C]// *Proceedings of the 2012 International Conference on Software Engineering*. Piscataway, USA, 2012:1427-1430
- [25] Chen Feng, Rosu G. MOP: An Efficient and Generic Runtime Verification Framework[C]// *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> annual ACM SIGPLAN conference on Object-oriented programming, systems, languages, and applications*. New York, USA, 2007:569-588
- [26] Jin Dong-yun. Making Runtime Monitoring of Parametric Properties Practical[D]. USA: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012
- [27] Jin Dong-yun, Meredith P O, Griffith D, et al. Garbage Collection for Monitoring Parametric Properties[C]// *Proceedings of the 32<sup>nd</sup> ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation*. New York, USA, 2011:415-424
- [28] Avgustinov P, Tibble J, Bodden E, et al. Efficient Trace Monitoring[C]// *Proceedings of the 21<sup>st</sup> ACM SIGPLAN Symposium on Object-oriented Programming Systems, Languages, and Applications*. New York, USA, 2006:685-686
- [29] Meredith P O, Jin Dong-yun, Chen Feng, et al. Efficient Monitoring of Parametric Context-Free Patterns[J]. *Automated Software Engineering*, 2010, 17(2):149-180
- [30] Rosu G, Chen Feng. Semantics and Algorithms for Parametric Monitoring[J]. *Logical Methods in Computer Science*, 2012, 8(1):1-47
- [31] Chen Feng, Rosu G. Parametric Trace Slicing and Monitoring[C]// *Proceeding of the 15<sup>th</sup> International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of the Systems*. Berlin, Germany, 2009:246-261