

基于状态概率转移的 SIRS 病毒传播模型及其临界值分析

顾海俊¹ 蒋国平² 夏玲玲¹

(南京邮电大学计算机学院 南京 210003)¹ (南京邮电大学自动化学院 南京 210003)²

摘要 针对 SIRS(Susceptible-Infected-Removed-Susceptible)病毒传播模型,利用状态转移概率的方法,通过计算节点处于各个状态的概率来研究 SIRS 病毒传播过程。首先建立状态概率方程组,描述各个时刻各个节点处于易感染态、感染态、免疫态的概率,通过稳态分析理论推导网络的病毒传播临界值,然后利用蒙特卡罗方法,对均匀网络和非均匀网络的病毒传播临界值进行分析和仿真。结果表明,相对于传统的平均场方法,基于状态概率方程组模型求得的传播临界值更加接近真实蒙特卡罗值,并且与免疫丧失率无关。

关键词 传播临界值,概率方程组,SIRS 模型,平均场方法

中图法分类号 N945 文献标识码 A

SIRS Epidemic Model and its Threshold Based on State Transition Probability

GU Hai-jun¹ JIANG Guo-ping² XIA Ling-ling¹

(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)¹

(School of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)²

Abstract For SIRS (Susceptible-Infected-Removed-Susceptible) epidemic model, we used the method of state transition probability to study the SIRS epidemic process through calculating the probability in each state over time. First, we established state probability equations to describe the probability in susceptible state, infection state and immune state of each node at each moment. Then, we derived the epidemic threshold of SIRS model by the theory of steady state analysis. Finally, using the Monte Carlo method, we analyzed and simulated the epidemic threshold in both homogeneous network and heterogeneous network. Compared with the traditional mean-field method, the simulation results show that the threshold obtained by the state probability equations is much closer to real Monte Carlo value and has no relations with the immune deficiency rate.

Keywords Epidemic threshold, Probability equations, SIRS model, Mean-field method

1 引言

在几千年历史长河中,人类不断地跟各种传染性疾病作斗争,如流感、天花、瘟疫、SARS 病毒等等。最近出现的中东呼吸综合症(MERS)——一种 3 年前在沙特发现的高致命性新型传染病,在今年上半年成为占领全球报章头条的高频词,全球致死率高达 40%。病毒的爆发给人们带来了巨大的损失。从复杂网络传播动力学研究中可知,病毒传播是有传播临界值的,如果有效传播率大于该临界值,则感染个体能够将病毒传播扩散并使得整个网络感染个体总数最终稳定于某一平衡状态,如果有效传播率低于该临界值,则感染个体数呈指数衰减,无法大范围传播。今年, MERS 突然在沙特蔓延,并越过沙漠直达亚欧大陆,它的有效传播率显然已经超过传播阈值。先是韩国确诊首例 MERS 病例,仅一个月,疫情呈爆发之势,韩国感染者人数急剧上升,接二连三,中、俄、德、泰等国境内相继发现 MERS 感染者,甚至出现死亡病例。为及时了解病毒发生后的传播态势,争取疫苗的研制时间,找寻有效

的控制疫情策略,对病毒传播临界值的准确把握显得尤为重要。

随着复杂网络理论不断发展,研究者们提出了多种病毒传播模型,在这些传播模型中,种群内的个体被抽象为几类,每一类都处于一个典型的状态,其基本状态包括: S (Susceptible): 易感染状态; I (Infected): 感染状态; R (Removed): 免疫状态。通常用这些状态之间的转换过程来命名不同的传染模型,比如常见的有 SI 模型^[1]、SIS 模型^[2]、SIR 模型^[3]、SIRS 模型^[4]等。

早期病毒传播的研究大多都是采用仓室模型^[5],该模型假设人群是均匀混合的,并且个体之间的接触概率相同。根据现实网络,这种模型明显是有缺陷的,它未能刻画出底层网络拓扑。因此,人们将个体抽象为节点,个体间的关联看作节点之间的连边,把病毒传播归结为复杂网络系统上的传播行为^[6]。对均匀网络(如 WS 小世界网络^[7])和非均匀网络(如 BA 无标度网络^[8])的动力学特性,如传播临界值、最终感染密度^[9]等进行了深入的研究。Pastor-Satorras 等^[10]首次建立

本文受国家自然科学基金(61374180,61373136),教育部人文社会科学研究规划基金(12YJAZH120),江苏省“六大人才高峰”(RLD201212)资助。
顾海俊(1990—),男,硕士生,主要研究方向为复杂网络理论及其应用,E-mail: ghjnupt@163.com;蒋国平(1966—),男,博士,教授,主要研究方向为混沌系统同步与控制、复杂网络理论及其应用等;夏玲玲(1988—),女,博士生,主要研究方向为复杂网络理论及其应用等。

了基于异质网络的 SIS 病毒传播模型的平均场方程,利用稳态分析理论推导出病毒传播临界值。其中一个重要的结论是在均匀网络中存在一个与网络平均度相关联的正的传播临界值,而在大规模无标度网络中,传播临界值几乎为零^[10,11],并且发现了疾病在小世界网络中的传播阈值明显小于规则的网络。文献^[12]进一步讨论了无标度网络上网络规模对传播动力学行为的影响,发现了有限规模的无标度网络存在正的传播临界值。文献^[13]假设在每个节点具有相同传染力的情况下,病毒传播在无标度网络上也存在正的临界阈值。

近些年来已经有很多研究人员致力于传播临界值的研究,Newman 和 Moore^[14]利用渗流理论系统研究了小世界网络上的病毒传播行为,并给出了最近邻耦合网络上增加长程边的比例与病毒爆发阈值的关系式;Stone 等^[15]在动态小世界网络上研究了病毒传播行为,将动态小世界网络刻画为固定短程连接和以概率 p 进行随机长程连接的网络,最终得出关于 p 的病毒传播临界值 $p_c = \frac{r^2(1-q)}{(2q^2-rq^2+rq)}$,其中 q 为感染率, r 为恢复率。后来人们发现关联性在复杂网络中是一个非常重要的特性,因此 Boguñá 等^[16]考虑无标度网络的度相关性,通过 SIS 模型得出病毒传播临界值 $\lambda_c = 1/\Lambda_{\max}$,其中 Λ_{\max} 为网络邻接矩阵的最大特征值。另外他们还指出,无关联网络的邻接矩阵具有唯一的特征值。Faloutsos 等^[17]研究计算机病毒传播动力学时,在忽略网络度关联性的情况下,通过离散模型也可以得出相同的临界值结论。Moreno 等^[18]通过分析关联网络上的 SIR 模型也得到了类似的结论。

到目前为止,分析病毒传播动力学的方法中,异构平均场方法(Heterogeneous Mean Field, HMF)是使用比较普遍的,但是该方法按照节点的度进行分类,假定度相同的节点具有相同的动力学性质^[10,19],会导致不同程度的精确度问题^[20]。而状态转移概率方法^[17]从微观角度计算每个节点随着时间处于各个状态的概率,考虑了各个节点的差异性,然后得出处于各个状态的节点的比例,结果将更加精确。

由于现实生活中存在很多 SIRS 类型的病毒,如乙肝病毒、感冒病毒等,此类病毒具有反复性,因此逐渐引起了人们的重视。为了进一步研究该类病毒的传播特性,本文在 SIRS 传播模型的基础上,从微观角度来分析每个个体的传播行为。基于状态转移概率方法^[22],采用非线性动力学系统(Nonlinear Dynamic Systems, NLDS)^[1,23]建立各个节点在每个离散时间步分别处于易感染态 S、感染态 I、免疫态 R 的概率的动力学方程组,借助雅可比矩阵通过稳态分析理论来判断初始节点的稳定性,并求得传播临界值。本文利用蒙特卡罗方法分别在均匀网络和非均匀网络上对 SIRS 模型的病毒传播阈值进行了仿真,将仿真得到的阈值分别与概率方程方法和动力学平均场方法推导的传播阈值进行比较。其中为方便比较非均匀网络下不同方法推导的传播临界值,本文采用有限规模的无标度网络代替非均匀网络,确定哪一种方法推导的结果更接近蒙特卡罗的仿真结果,为更好地研究病毒传播过程以及确定传播临界值提供参考依据。

2 模型定义和分析

运用复杂网络理论知识,从病毒传播的宏观角度出发,将网络抽象成节点之间通过边相连接的拓扑图。对于一个有 N 个个体组成的复杂网络,其中每个个体处于以下 3 种状态

之一:易感染态 S_i 不会感染其他个体,但有可能被其他个体感染;感染态 I_i 已经被感染,具有传染性,可感染其他易感染节点;免疫态 R_i 已经被治愈的并获得免疫能力的节点,不会感染其他个体,也不会被其他个体所感染。网络中病毒传播的规则如下:易感染节点与感染节点接触,将以 β 概率被感染,感染节点以 δ 概率变成免疫节点,免疫节点以 τ 概率转变成易感染节点,将免疫节点丧失免疫能力的概率称为免疫丧失率。

因此上述的 SIRS 病毒传播模型可以用不同类型节点的状态转移图表示,如图 1 所示。

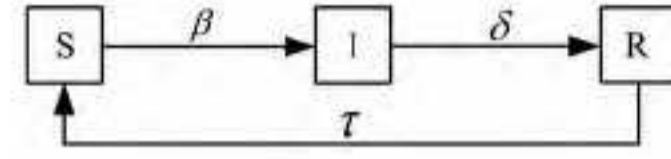


图 1 易感染者 S、感染者 I、免疫者 R 三者的状态转移图

假设网络中有 N 个节点,组成一个无向的、不加权的图 $G=(V,E)$, V 代表节点, E 代表边, A 为图 G 的邻接矩阵,当 i 节点与 j 节点之间存在边时 $a_{ij}=1$,否则 $a_{ij}=0$,其中 $i=j$ 时,也认为 $a_{ij}=0$ 。初始时刻在网络中随机选择一个节点作为感染节点,其余节点均为易感染节点。在 t 时刻,节点 i 处于 3 种状态中的其中一个,节点状态可以通过一个状态向量来表示: $s_i(t)=[s_i^S(t) s_i^I(t) s_i^R(t)]$,这个向量在当前状态位置为 1,其余位置为 0。 $p_i(t)=[p_i^S(t) p_i^I(t) p_i^R(t)]$ 为 i 节点在 t 时刻处于各个状态的概率,描述各个节点的动力学过程。因此建立以下病毒传播动力学方程:

$$\begin{aligned} p_i^S(t+1) &= s_i^S(t)(1-f_i(t)) + \tau s_i^R(t) \\ p_i^I(t+1) &= s_i^I(t) f_i(t) + (1-\delta) s_i^I(t) \\ p_i^R(t+1) &= (1-\tau) s_i^R(t) + \delta s_i^I(t) \end{aligned} \quad (1)$$

另外

$$s_i(t+1) = \text{MultiRealize}[p_i(t+1)] \quad (2)$$

其中, $p_i^S(t), p_i^I(t), p_i^R(t)$ 为概率质量函数,是离散随机变量在特定取值上的概率, $\text{MultiRealize}[p_i(t+1)]$ 是根据给定的 $p_i(t+1)$ 的概率分布随机实现的 i 节点在 t 时刻的状态。

$$f_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta a_{ij} s_j^I(t)] \quad (3)$$

其中, $0 < \beta \leq 1$ 是感染率, $0 < \delta \leq 1$ 是恢复率,定义病毒的有效传播率 $\lambda = \beta/\delta$ 。

a_{ij} 表明 i, j 节点之间是否有连边, $f_i(t)$ 表示 i 节点在 t 时刻受周围感染节点感染的概率。

令 $N^S(t) = \sum_{i=1}^N s_i^S(t), N^I(t) = \sum_{i=1}^N s_i^I(t), N^R(t) = \sum_{i=1}^N s_i^R(t)$ 为在 t 时刻健康节点、感染节点、免疫节点的总数。当 $t \rightarrow \infty$ 时,健康节点总数为 N_S ,感染节点总数为 N_I ,免疫节点总数为 N_R 。

虽然这个离散的动力学方程比较直观,但是节点在每一时刻处于新状态的概率依赖于上一时刻的节点状态向量,这使得动力学方程等式两边的参量不一致,导致用稳态理论直接分析其动力学特性变得不可行。因此根据 Chakrabarti 等人^[17]的方法,将方程(1)、(2)修改为:

$$\begin{aligned} p_i^S(t+1) &= p_i^S(t)(1-f_i(t)) + \tau p_i^R(t) \\ p_i^I(t+1) &= p_i^I(t) f_i(t) + (1-\delta) p_i^I(t) \\ p_i^R(t+1) &= (1-\tau) p_i^R(t) + \delta p_i^I(t) \end{aligned} \quad (4)$$

此时的 $f_i(t)$ 为:

$$f_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta a_{ij} p_j^I(t)] \quad (5)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,易感染节点、感染节点及免疫节点的总数分

别为 $N_S = \sum_{i=1}^N p_i^S(\infty)$, $N_I = \sum_{i=1}^N p_i^I(\infty)$, $N_R = \sum_{i=1}^N p_i^R(\infty)$ 。采用稳态分析方法, 可以利用这组动力学方程求得传播临界值。不妨将方程组中的 p_i^I 替换为 x_i , p_i^R 替换为 y_i , 由于 $p_i^S(t) + p_i^I(t) + p_i^R(t) = 1$, 则方程(4)、(5)可以改写为:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= (1-x_i(t)-y_i(t))f_i(t) + (1-\delta)x_i(t) \\ y_i(t+1) &= (1-\tau)y_i(t) + \delta x_i(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$f_i(t) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta a_{ij} x_j(t)], \quad (7)$$

方程(6)是一个非线性动力学系统 $F: [0,1]^{2N} \rightarrow [0,1]^{2N}$, 系统初始节点 $(x_i, y_i) = (0,0)$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ 为固定点, 可以通过雅可比矩阵来分析方程(6)在初始点的局部稳定性:

$$DF|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} A_\beta & 0_N \\ \delta I_N & (1-\tau)I_N \end{bmatrix}$$

其中, $A_\beta = (1-\delta)I + \beta A$, $A = [a_{ij}]_{N \times N}$, I_N 为 N 阶单位阵。当满足 $\max\{(1-\delta) + \beta\lambda, 1-\tau\} < 1$ 时, 初始节点局部稳定。因 $\tau > 0$, 故 $1-\tau < 1$ 恒成立, 可以得到传播阈值大小与免疫丧失率是没有关系的。

由 $(1-\delta) + \beta\lambda < 1$, 可以得到

$$\frac{\beta}{\delta} < \frac{1}{\lambda_{1,A}} \quad (8)$$

其中, $\lambda_{1,A}$ 是 A 矩阵的最大特征值, 因此得到传播临界值 $\lambda_c = 1/\lambda_{1,A}$, 当有效传播率小于 λ_c , 病毒将不会传播开, 并稳定于初始节点; 否则, 病毒将会爆发。

3 仿真结果

为了验证上述状态概率方程分析的传播临界值的正确性, 均匀网络以 WS 小世界网络[7]为原型, 非均匀网络以 BA 网络[8]为原型, 进行了大量的针对概率方程组(4)的数值仿真, 其中网络规模 $N=2000$, 平均度 $\langle k \rangle = 6$ 。初始网络中假定只有一个感染者, 其他均为易感染者, 且感染节点恢复率 $\delta = 1$, 考虑不同免疫丧失率 $\tau = 0.1, \tau = 0.2, \tau = 0.3$, 仿真实现在这 3 种情况下, 在事先生成的网络拓扑基础上, 利用概率方程组(4)进行不断迭代, 统计最终稳态感染概率得到的感染密度 $i(\infty)$ 与有效传播率 λ 的演化关系。图 2 和图 3 均是利用概率方程组计算得到的数值仿真结果。图 4 和图 5 的蒙特卡罗仿真结果是在 50 次网络中每次网络实现 1000 次模拟传播的平均值。

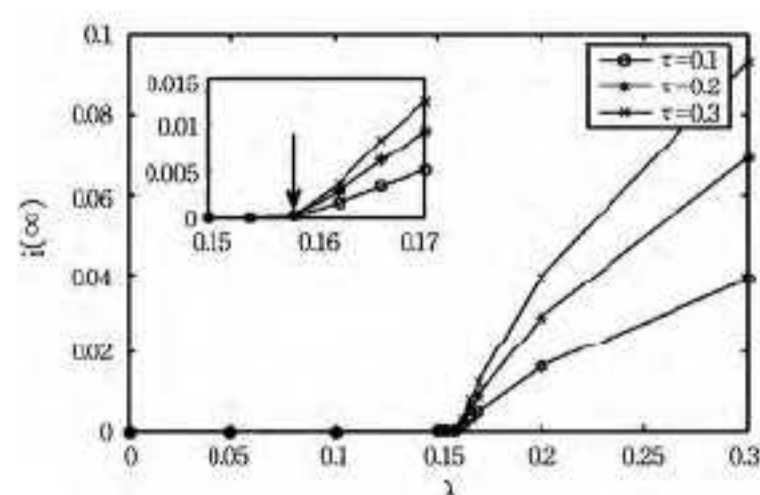


图 2 WS 模型上 λ 和 $i(\infty)$ 的关系

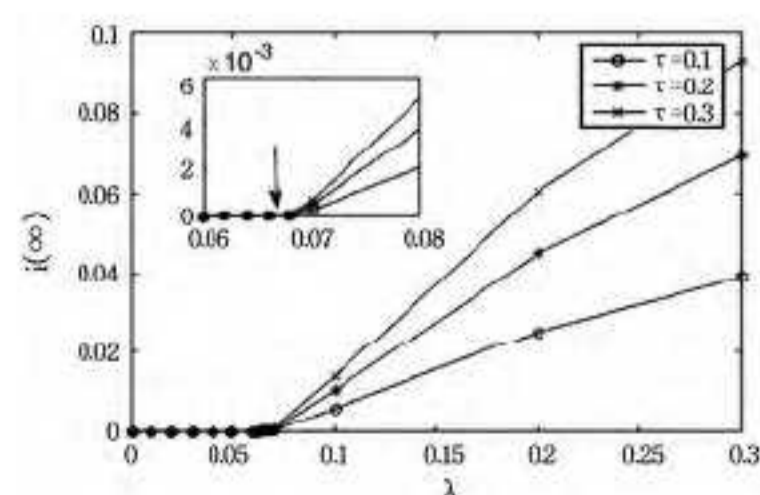
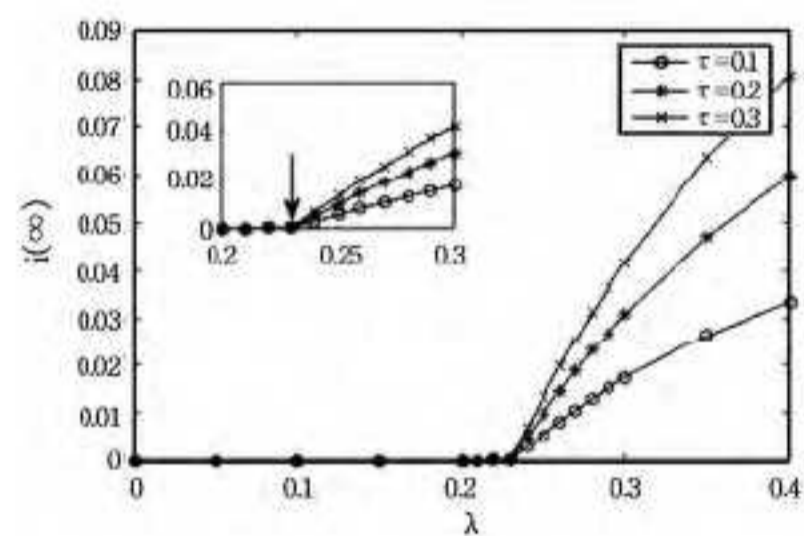


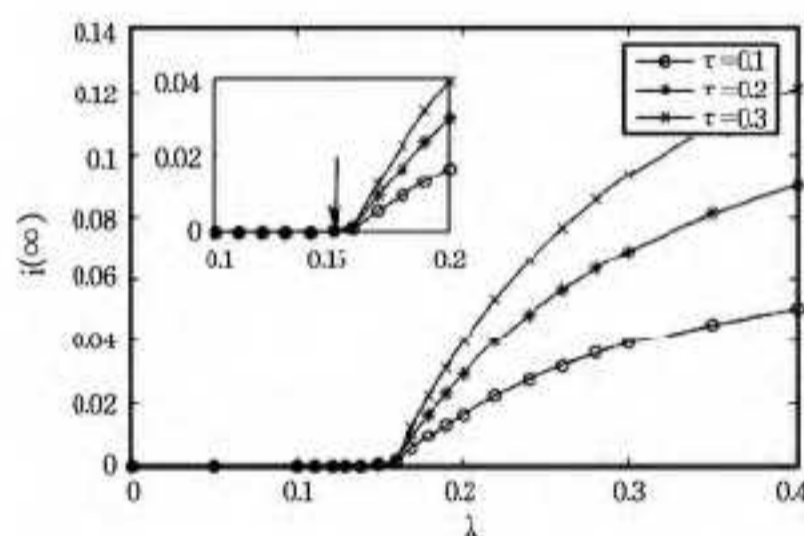
图 3 BA 模型上 λ 和 $i(\infty)$ 的关系

图 2 给出了 WS 模型上稳态时感染密度 $i(\infty)$ 与有效传播率 λ 的关系, 从图中可以看出, 概率方程系统的仿真临界阈值在 0.158 附近, 与理论结果 $1/\lambda_{1,A} = 0.1583$ 基本吻合。图 3 给出了 BA 模型上稳态时感染密度 $i(\infty)$ 与有效传播率 λ 的关系, 从图中可以看出, 概率方程系统的仿真阈值在 0.068 附近, 与理论结果 $1/\lambda_{1,A} = 0.0682$ 基本吻合。图 2 和图 3 都体现出临界阈值与免疫丧失率无关, 验证了上节中阈值推导的正确性。

文献[24]中给出, 传统求解 SIRS 模型传播阈值时采用平均场方法, 均匀网络的阈值 $\lambda_c = 1/\langle k \rangle$, 非均匀网络的传播临界值 $\lambda_c = \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$, 为了比较出平均场方法和概率方程方法得出的传播临界值哪种更加准确, 我们分别对 WS 小世界网络和 BA 无标度网络上的 SIRS 病毒传播过程进行蒙特卡罗仿真。

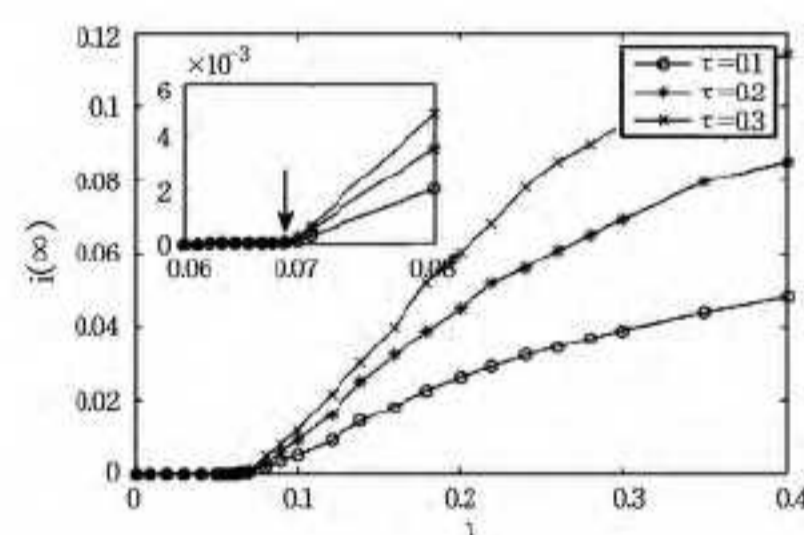


(a) $\langle k \rangle = 4$

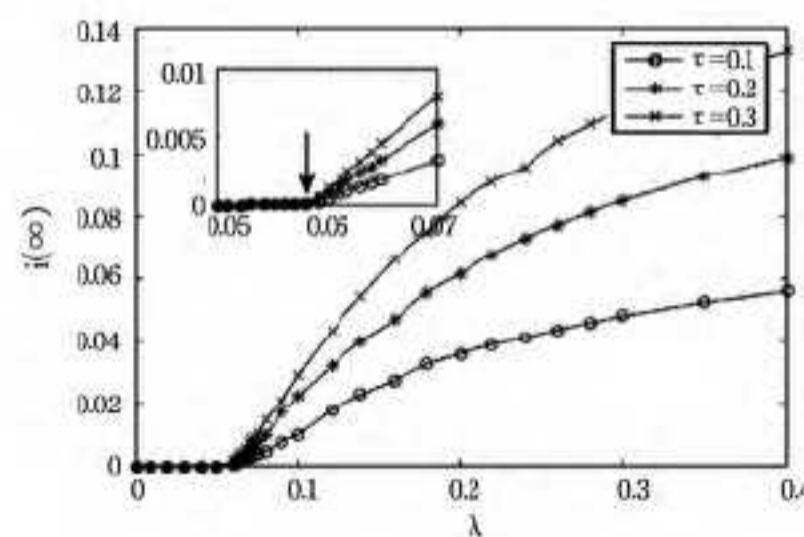


(b) $\langle k \rangle = 6$

图 4 WS 模型上 λ 和 $i(\infty)$ 的关系



(a) $\langle k \rangle = 6$



(b) $\langle k \rangle = 8$

图 5 BA 模型上 λ 和 $i(\infty)$ 的关系

传播临界值的比较如表 1 所列。

表 1 传播临界值比较

网络	N	$\langle k \rangle$	概率方程	平均场	蒙特卡罗
WS	2000	4	0.2287	0.2500	0.230
WS	2000	6	0.1583	0.1667	0.160
BA	2000	6	0.0682	0.0657	0.068
BA	2000	8	0.0581	0.0556	0.058

表 1 分别列出图 4 和图 5 的蒙特卡罗仿真结果,以及平均场方法和概率方程方法求得的阈值,通过比较发现,概率方程所求得的传播阈值更加接近仿真结果。此外,相比于平均场理论在求解传播阈值时依据网络是均质还是异质适用于不同的阈值表达式,概率方程法得到的阈值表达式更加统一。因此认为,SIRS 模型的传播阈值用状态概率系统方法来求解更加合适。

结束语 本文基于复杂网络理论,从微观层面利用状态转移概率方法研究了 SIRS 模型的动力学传播过程。分别对小世界网络和无标度网络上各个节点处于易感染态、感染态以及免疫态的概率进行分析,利用雅可比矩阵推导出传播临界值,并对结果进行仿真验证。本模型的主要特点是:1)从状态概率的微观角度考虑了每个节点的演化过程;2)考虑传播过程中每个节点传染力的差异性。我们发现,无论在均匀网络或是非均匀网络中,通过将概率方程迭代计算的结果与蒙特卡罗仿真结果进行对比,结果都表明状态概率系统模型推导出的传播临界值更加准确,这对于实现现实网络中病毒爆发的控制具有指导意义。

由于网络中病毒传播过程的复杂性,因此还有很多方面值得进一步探讨,主要包括:1)利用状态概率系统结合稳态分析理论推导出的阈值求解方法,除了适用于 SIS 模型、SIR 模型、SIRS 模型,是否也适用于其他传播模型,如带有潜伏期的 SEIR 模型等;2)对微观层次各个节点状态概率的研究,可以探讨在某一时刻是否可以追溯到初始感染的源节点。

参 考 文 献

[1] Zhou Tao, Liu Jian-guo, Bai Wen-jie, et al. Behaviors of susceptible-infected epidemics on scale-free networks with identical infectivity[J]. *Physical Review E*, 2006, 74(5):056109

[2] Shi Hong-jing, Duan Zhi-sheng, Chen Guang-rong. An SIS model with infective medium on complex networks[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2008, 387(8):2133-2144

[3] Wang Jia-zeng, Liu Zeng-rong, Xu Jian-hua. Epidemic spreading on uncorrelated heterogenous networks with non-uniform transmission[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, 382(2):715-721

[4] Da Silva R, Fernandes H A. A study of the influence of the mobility on the phase transitions of the synchronous SIR model[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015, 2015(6):P06011

[5] 马之恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004

[6] 巩永旺. 考虑个体行为的复杂网络病毒传播研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2014

[7] 侯鹏锋, 赵海兴. 一种星-树结构的确定性的小世界网络[J]. *计算机科学与应用*, 2014(4):276-281

[8] 胡耀光, 王圣军, 金涛, 等. 度关联无标度网络上的有倾向随机行走[J]. *物理学报*, 2015, 64(2):028901-028901

[9] 王亚奇, 蒋国平. 复杂网络中考虑不完全免疫的病毒传播研究[J]. *物理学报*, 2010, 59(10):6734-6743

[10] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 63(6):066117

[11] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. *Physical review letters*, 2001, 86(14):3200-3203

[12] May R M, Lloyd A L. Infection dynamics on scale-free networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 64(6):066112

[13] Yang Rui, Wang Bing-hong, Ren Jie, et al. Epidemic spreading on heterogeneous networks with identical infectivity[J]. *Physics Letters A*, 2007, 364(3):189-193

[14] Moore C, Newman M E J. Epidemics and percolation in small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2000, 61(5):5678

[15] Stone T, McKay S. Critical behavior of disease spread on dynamic small-world networks [J]. *Europhysics Letters*, 2011, 95(3):38003

[16] Boguñá M, Pastor-Satorras R, Vespignani A. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations [J]. *Physical review letters*, 2003, 90(2):028701

[17] Chakrabarti D, Wang Y, Wang C, et al. Epidemic thresholds in real networks[J]. *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)*, 2008, 10(4):1

[18] Moreno Y, Gómez J B, Pacheco A F. Epidemic incidence in correlated complex networks[J]. *Physical Review E*, 2003, 68(3):035103

[19] Barthélemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, et al. Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(17):178701

[20] Guerra B, Gómez-Gardeñes J. Annealed and mean-field formulations of disease dynamics on static and adaptive networks[J]. *Physical Review E*, 2010, 82(3):035101

[21] Smilkov D, Kocarev L. Influence of the network topology on epidemic spreading[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(1):016114

[22] Eslahchi C, Movahedi F. Calculation of transition probabilities in the birth and death Markov process in the epidemic model[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, 55(3):810-815

[23] Trpevski D, Tang W K S, Kocarev L. Model for rumor spreading over networks[J]. *Physical Review E*, 2010, 81(5):056102

[24] 李光正, 史定华. 复杂网络上 SIRS 类疾病传播行为分析[J]. *自然科学进展*, 2006, 16(4):508-512