模糊信息系统中基于OWA算子的模糊粗糙集模型

杨霁琳[1] 秦克云[2]
(四川师范大学基础教学学院 成都 610068)[1] (西南交通大学数学学院 成都 610031)[2]

摘 要 在模糊信息系统中,属性值并不是一个确定的值,而是一个隶属度函数。因此,通过利用有序加权平均(OWA)算子聚合对象间在每个属性上的差异,刻画出对象之间的相似性,定义对象的相似度并讨论其相关性质。借助对象相似度,通过逻辑关系和相应的函数运算,分别给出了对象隶属于上、下近似集合的隶属度。最后,通过实例分析说明在模糊信息系统中,该相似度能较准确地刻画出对象的相似性,同时,对象对于上、下近似的隶属度能更直观、合理地反应对象隶属于某一集合的上、下近似的情况,且能更合理地描述这一粗糙集合。

关键词 模糊信息系统,粗糙集,相似度,相容关系,隶属度

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10. 11896/j. issn. 1002-137X. 2016. 12. 014

Fuzzy Rough Set Model Based on OWA Operator in Fuzzy Information System

YANG Ji-lin[1] QIN Ke-yun[2]
(College of Fundamental Education, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)[1]
(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)[2]

Abstract In the fuzzy information system, attribute value is not an uncertain value, it is a membership function. Therefore, differences between objects are aggregated by the ordered weighted averaging (OWA) operator for all the attributes, which characterizes the similarity of objects. Then similar degree of objects was defined and the related properties were discussed. According to the similar degree of objects, the membership degree of an object which belongs to lower and upper approximations was given by logic relations and function operations. Finally, experimental results show that the similarity of objects can be accurately characterized by the similar degree of objects. Moreover, every object belonging to the lower and upper approximation sets can be more visually and reasonably described by membership degrees of every object for lower and upper approximations. Meanwhile, the description of the rough set can be more reasonable.

Keywords Fuzzy information system, Rough set, Similar degree, Tolerance relation, Membership degree

1 引言

1982年Pawlak提出了一种处理模糊和不确定性知识的数学工具,即粗糙集理论[1]。Pawlak粗糙集理论的主要思想是以等价关系为基础,通过两个可定义的精确集合即上、下近似集合来描述知识的不确定性。这种模型在完备信息系统中被成功运用[2,3]。

在现实生活中,由于各种原因,大量信息系统得到的数据并不一定都是一个精确的值。在模糊信息系统中,数据往往被认为是一个模糊的概念。Dubois和Prade从模糊集的隶属度函数出发,定义了模糊等价关系,从而建立了一种模糊粗糙集模型[4]。在模糊信息系统中,这种对象之间的模糊等价过于严格,于是研究者们对粗糙集理论进行扩充[5-8]。其中,如何刻画对象之间的相似性是模糊粗糙集模型研究的热点之一。

在模糊信息系统中,我们注意到对象自身数据为一个不确定的值。因此,本文利用有序加权平均(OWA)算子聚合对象间在属性集中每个属性上的差异,刻画出对象之间的相似性程度,并给出了该相似度的相关性质。然后,利用对象的相似度,通过逻辑关系和相应的函数运算,分别给出了对象隶属于上、下近似集合的隶属度。根据该隶属度,可确定论域中任意集合的上、下近似这一对模糊集合。最后,通过实例分析表明,在模糊信息系统中,利用OWA算子能较全面地刻画出对象之间在属性集上的相似性;同时,利用该相似度定义的对象隶属于上、下近似集合的隶属度能更直观更清晰地刻画对象隶属于某一集合的上、下近似的具体情况,且能更合理地描述一个粗糙集合。

2 基于OWA算子的对象相似度

定义1 称四元组$\Omega=(U,A,V,f)$为一个模糊信息系统,其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限的对象集合,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是非空有限属性集合,$V=\{V_a|a\in A\}$,V_a是属性a的属性值构成的集合且$V_a\subseteq[0,1]$,f为一个映射,$f:U\times$

到稿日期:2015-11-02 返修日期:2016-01-23 本文受国家青年科学基金项目(61203285),四川省教育厅科研项目(11ZB068),四川师范大学重点研究课题资助。

杨霁琳(1981—),女,博士,讲师,主要研究方向为智能信息处理、粗糙集理论与应用,E-mail:yjl524@163.com;**秦克云**(1962—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集理论与方法、多值逻辑。

$A \to V_a$，称为信息函数。

在前期研究中，利用 OWA 算子聚合对象间在属性集中每个属性上的差异，从而得到对象的区分度，建立了对象不可区分关系[9]。本文将在此基础上进一步讨论对象的相似度并详细分析其相关性质。

定义 2[10] 假设 $F: R^m \to R$，有一与 F 相关联的 m 维加权向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$，$w_i\in[0,1]$，$1\leqslant i\leqslant m$，且 $\sum_{i=1}^{m}w_i=1$，使得 $F(a_1,a_2,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{m}w_ib_i$，其中 b_i 是 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 中第 i 个最大元素，则称 F 为 m 维 OWA 算子。

在 OWA 算子中，根据聚合要求，加权向量一般可通过模糊量词 Q 确定[14]，即模糊量词 Q 表示为：

$$Q(r)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<\alpha\\ \dfrac{r-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\leqslant r\leqslant\beta\\ 1, & \beta<r\leqslant 1\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\alpha,\beta\in[0,1]$，(α,β) 有多种取值方式，如参数 (α,β) 最常用 3 种取值，分别为 $(0.3,0.8)$，$(0,0.5)$，$(0.5,1)$，表示模糊量词"大多数"，"至少一半"和"尽可能多"[14]。相应地，有序加权向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 可按如下方式确定：

$$w_i=Q[\frac{i}{m}]-Q[\frac{i-1}{m}] \tag{2}$$

定义 3 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，对象集 $U=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，属性集 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$。则 $\forall x,y\in U$ 在属性集 A 上的相似度为：

$$s_A(x,y)=1-F_A(T_A)=1-H_A(E_A)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

其中，F_A 是 OWA 算子，

$T_A=(\mu_{a_1}(x,y),\mu_{a_2}(x,y),\cdots,\mu_{a_m}(x,y))$，$\mu_{a_j}(x,y)=|f(x,a_j)-f(y,a_j)|(j=1,2,\cdots,m)$，是对象 x 和 y 在属性 a_j 上的差异。$H_A=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 由式(1)和式(2)获得，它是模糊信息系统属性集 A 中各属性对应的权重。$E_A=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y))$ 且满足 $\forall l\in\{1,2,\cdots,m\}$，有 $\mu_{a^{\sigma(l)}}(x,y)\geqslant\mu_{a^{\sigma(l+1)}}(x,y)$。

显然 $s_A(x,y)\in[0,1]$，$s_A(x,y)$ 的值越接近 0，表示对象 x 和 y 的越不相似；反之，$s_A(x,y)$ 的值越接近 1，表示对象 x 和 y 的越相似。

性质 1 在模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$ 中，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$\forall x,y\in U$，有：

(1) $\forall a\in A$，$\mu_a(x,y)=1$，则 $s_A(x,y)=0$；

(2) $\forall a\in A$，$\mu_a(x,y)=0$，则 $s_A(x,y)=1$。

证明：$\forall x,y\in U$，$\forall a\in A$：

(1)当 $\mu_a(x,y)=1$，$T_A=(1,1,\cdots,1)$。根据定义 3，有 $s_A(x,y)=1-F_A(T_A)=1-H_A(E_A)^{\mathrm{T}}=1-(w_1,w_2,\cdots,w_m)(1,1,\cdots,1)=1-1=0$。若 $s_A(x,y)=0$，则 $\mu_a(x,y)$ 不一定全为 1。设 $E_A=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y))$ 是 $\mu_a(x,y)$ 按值从大到小的序列，设 $\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(l-1)}}(x,y)=1$，且 $\mu_{a^{\sigma(l)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(l+1)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y)$ 可以是小于 1 的任意值，当设定参数 (α,β) 的值使得 $\sum_{i=1}^{l-1}w_i=1$，且 $w_l,w_{l+1},\cdots,w_m=0$，则有 $s_A(x,y)=1-((w_1,w_2,\cdots,w_{l-1})(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(l-1)}}(x,y))+(w_l,w_{l+1},\cdots,w_m)(\mu_{a^{\sigma(l)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(l+1)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y)))=1-(1+0)=0$。显然 $\mu_a(x,y)$ 不全为 1。

(2)当 $\mu_a(x,y)=0$，有 $T_A=(0,0,\cdots,0)$，根据定义 3，$s_A(x,y)=1-F_A(T_A)=1-H_A(E_A)^{\mathrm{T}}=1-(w_1,w_2,\cdots,w_m)(0,0,\cdots,0)=1-0=1$。反之，若 $s_A(x,y)=1$，则 $\mu_a(x,y)$ 不一定全为 0。设 $E_A=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y))$ 是 $\mu_a(x,y)$ 按值从大到小的序列，其中 $\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(l-1)}}(x,y)\neq0$，且 $\mu_{a^{\sigma(l)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(l+1)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y)=0$，设定参数 (α,β) 的值使 $w_1,w_2,\cdots,w_{l-1}=0$，且 $\sum_{i=l}^{m}w_i=1$，则有 $s_A(x,y)=1-((w_1,w_2,\cdots,w_{l-1})(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(l-1)}}(x,y))+(w_l,w_{l+1},\cdots,w_m)(\mu_{a^{\sigma(l)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(l+1)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y)))=1-(0+0)=1$。显然 $\mu_a(x,y)$ 不都为 0。

性质 2 在模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$ 中，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$\forall x,y\in U$，有：

(1) $s_A(x,x)=1$；

(2) $s_A(x,y)=s_A(y,x)$。

证明：$\forall x,y\in U$，$\forall a\in A$：

(1) $\mu_a(x,x)=|f(x,a)-f(x,a)|=0$，根据定义 3，有 $s_A(x,y)=1-((w_1,w_2,\cdots,w_m)(0,0,\cdots,0))=1-0=1$。

(2) $\mu_a(x,y)=|f(x,a)-f(y,a)|=|f(y,a)-f(x,a)|=\mu_a(y,x)$，因此根据定义 3，易证 $s_A(x,y)=s_A(y,x)$。

定义 4 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。若 $B\subset A$，则 $\forall x,y\in U$ 在属性集 B 上的相似度为：

$$s_B(x,y)=1-F_A(T_B)=1-H_A(E_B)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

其中，$T_B=(\mu_{a_1}(x,y),\mu_{a_2}(x,y),\cdots,\mu_{a_m}(x,y))$，$\exists a\in A$，且 $a\notin B$，有 $\mu_a(x,y)\in T_B$，且 $\mu_a(x,y)=0$。$H_A=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是属性集 A 中各属性对应的权重。

性质 3 在模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$ 中，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。若 $B\subseteq A$，$\forall x,y\in U$，则有 $s_B(x,y)\geqslant s_A(x,y)$。

证明：(1)当 $B=A$，则 $s_B(x,y)=s_A(x,y)$；

(2)当 $B\subset A$，则 $\exists a\in A, a\notin B$，且 $\mu_a(x,y)=0$，则

$$\begin{aligned}E_B&=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_a(x,y))\\&=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,0)\end{aligned}$$

而 $E_A=(\mu_{a^{\sigma(1)}}(x,y),\mu_{a^{\sigma(2)}}(x,y),\cdots,\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y))$，$\mu_{a^{\sigma(m)}}(x,y)\geqslant0$，因此 $H_A(E_B)^{\mathrm{T}}\leqslant H_A(E_A)^{\mathrm{T}}$，则 $1-H_A(E_B)^{\mathrm{T}}\geqslant1-H_A(E_A)^{\mathrm{T}}$，根据定义 3 和定义 4，即 $s_B(x,y)\geqslant s_A(x,y)$，因此若 $B\subseteq A$，有 $s_B(x,y)\geqslant s_A(x,y)$。

定义 5[9] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，$\forall x,y\in U$，在属性集 $B\subseteq A$ 下，不可区分关系定义为：

$$R': U\times U\to[0,1], xRy=\{(x,y)\in U\times U\mid s_B(x,y)\geqslant\lambda\}$$

其中，$s_B(x,y)$ 是对象 x 和 y 在属性集 B 上的相似度，$\lambda\in[0,1]$ 是阈值，可根据具体问题设置。显然，R 满足自反性和对称性，但不一定满足传递性，因此 R 是相容关系。

定义 6[9] 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，$\forall x\in U$，在属性集 $B\subseteq A$ 下，其相容类定义为：

$$S_B(x)=\{y\in U\mid s_B(x,y)\geqslant\lambda\} \tag{5}$$

对于 $\forall x,y\in U$，有 $R_B(x,x)=1$，$R_B(x,y)=R_B(y,x)$，所以 $S_B(x)$ 是一个自反对称的信息粒。

3 模糊信息系统中上、下近似的模糊化

在经典粗糙集理论中，一个不精确集由两个精确集近似地刻画，即用粗糙集的上、下近似集合来描述。在模糊信息系统中，对象自身存在不确定性，为一个不确定的值，即是一个隶属度函数。本文基于 OWA 算子，利用对象间在每个属性上的差异，刻画了对象的相似度。在通过设定阈值建立的不可区分关系中，同一相容类中各对象之间的相似度有可能并不相同。因此，各对象对于上、下近似的贡献也各不相同，直观地，上、下近似可以看成是一对模糊集合。用上、下近似集合来描述不精确集时，就存在上、下近似集合中的元素是否更逼近该不精确集合且它是否能被描述得更准确、合理的问题。

针对以上问题，本节利用对象之间的相似度，通过逻辑关系和相应的函数运算，分别给出了对象隶属于上、下近似集合的隶属度，形式地，该过程可理解为上、下近似集合的模糊化。

定义 7 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。任意对象集 $Z\subseteq U$ 的上、下近似分别定义为：

$$\underline{R}(Z)=\{x\in U;S_A(x)\subseteq Z\} \tag{6}$$

$$\overline{R}(Z)=\{x\in U;S_A(x)\cap Z\neq\emptyset\} \tag{7}$$

利用逻辑上的非、合取、析取和蕴涵关系以及选取恰当的函数运算将上、下近似翻译成另一种表达式。

1)"非"：函数 N，通常的运算是 $N(x)=1-x$；

2)合取：函数 T-norm，通常的运算是 $T(x,y)=xy$；

3)析取：函数 T-conorm，通常的运算是 $S(x,y)=x+y-xy$；

4)蕴涵：函数 I，通常的运算是 $I(x,y)=1-x+xy$。

若有对象集合 $Z,W\subseteq U$，根据逻辑关系和相关函数[5]，有：

1) $\forall xZ(x)\overset{def}{=}T_xZ(x)$，$\exists xZ(x)\overset{def}{=}S_xZ(x)$；

2) $Z\subseteq W\overset{def}{=}T_x(I(\mu_Z(x),\mu_W(x)))$；

3) $Z\cap W\neq\varphi=\exists xZ(x)\wedge W(x)\overset{def}{=}S_x(T(\mu_Z(x),\mu_W(x)))$，将上面的 1)－3) 带入式(6)和式(7)，可得：

$$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)=T_{y\in S_A(x)}(I(s_A(x,y),\hat{y})) \tag{8}$$

$$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)=S_{y\in S_A(x)}(T(s_A(x,y),\hat{y})) \tag{9}$$

其中，$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)$ 表示对象 x 隶属于对象子集 Z 的下近似集合的程度；$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)$ 表示对象 x 隶属于对象子集 Z 的上近似集合的程度；T,S,I 是相对应的逻辑函数；$S_A(x)$ 是对象 x 的相容类；$s_A(x,y)$ 是对象 x 与 y 的相似度；$\hat{y}$ 是对象 y 在集合 Z 上的特征函数值，$\hat{y}\in\{0,1\}$，$\hat{y}=0$ 表示 y 不属于集合 Z，$\hat{y}=1$ 表示 y 属于集合 Z。

将 T,S,I 对应的函数运算带入到式(8)和式(9)，定义任意对象 x 对于上、下近似集合的隶属度。

定义 8 设 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，属性集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。任意对象集 $Z\subseteq U$，则 x 隶属于 Z 的上、下近似集合的隶属度为：

$$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)=\prod_{y\in S_A(x)}(1-s_A(x,y)+s_A(x,y)\hat{y}) \tag{10}$$

$$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)=1-\prod_{y\in S_A(x)}(1-s_A(x,y)\hat{y}) \tag{11}$$

其中，$s_A(x,y)$ 是对象 x 与 y 基于 OWA 算子的相似度。$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)$、$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)\in[0,1]$。$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)$ 越接近 1，表示 x 隶属于 Z 的下近似集合的程度越大；$\mu_{\underline{R}(Z)}(x)$ 越接近 0，表示 x 隶属于 Z 的下近似集合的程度越小。同样地，$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)$ 越接近 1，表示 x 隶属于 Z 的上近似集合的程度越大；$\mu_{\overline{R}(Z)}(x)$ 越接近 0，表示 x 隶属于 Z 的上近似集合的程度越小。

在模糊信息系统 $\Omega=(U,A,V,f)$ 中，根据定义 8 给出的上、下近似集合的隶属度，对于任意 $Z\subseteq U$，可以确定一对模糊集合 $\underline{R}(Z)$ 和 $\overline{R}(Z)$，具体可分别表示如下：

$$\underline{R}(Z)=\frac{\mu_{\underline{R}(Z)}(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_{\underline{R}(Z)}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_{\underline{R}(Z)}(x_n)}{x_n} \tag{12}$$

$$\overline{R}(Z)=\frac{\mu_{\overline{R}(Z)}(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_{\overline{R}(Z)}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_{\overline{R}(Z)}(x_n)}{x_n} \tag{13}$$

若 $\underline{R}(Z)=\overline{R}(Z)$，则集合 Z 是一个精确集，是可定义的；若 $\underline{R}(Z)\neq\overline{R}(Z)$，则集合 Z 是一个不精确集，是不可定义的。

4 实例分析

下面用一个实例分析说明在模糊信息系统中利用 OWA 算子可以刻画出对象之间的相似性，然后利用该对象的相似度建立对象隶属于上、下近似的隶属度。

例 1 $\Omega=(U,A,V,f)$ 是一个模糊信息系统，对象集合 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，属性集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，如表 1 所列。

表 1 $\Omega=(U,A,V,f)$ 模糊信息系统数据表

Ω	a_1	a_2	a_3
x_1	0.1	0.8	0.9
x_2	1.0	0.5	0.3
x_3	0.6	0.3	0.8
x_4	0.3	0.8	0.9
x_5	0.2	0.9	0.9
x_6	0.5	0.3	0.6
x_7	0.8	0.7	0.3
x_8	1.0	0.6	0.2

首先，在 OWA 算子中，令模糊量词 $(\alpha,\beta)=(0,0.5)$，则权重向量为 $w=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$；然后以对象 x_1 和 x_2 为例，有 $\mu_{a_1}(x_1,x_2)=0.9$，$\mu_{a_2}(x_1,x_2)=0.3$，$\mu_{a_3}(x_1,x_2)=0.6$，则根据式(3)，x_1 和 x_2 的相似度为：

$$\begin{aligned}s_A(x_1,x_2)&=1-H_A(E_A)^{\mathrm{T}}\\&=1-(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)(0.9,0.6,0.3)^{\mathrm{T}}\\&=1-0.8=0.2\end{aligned}$$

同理，可计算所有对象间的相似度，如表 2 所列。

表 2 相似度 $s_A(x,y)$ 数据表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1							
x_2	0.20	1						
x_3	0.50	0.53	1					
x_4	0.87	0.33	0.57	1				
x_5	0.90	0.27	0.47	0.90	1			
x_6	0.53	0.57	0.83	0.57	0.50	1		
x_7	0.33	0.80	0.53	0.43	0.40	0.63	1	
x_8	0.17	0.90	0.47	0.30	0.23	0.53	0.83	1

根据定义 6,设阈值 $\lambda=0.8$,则相容类有 $S(x_1)=S(x_4)=S(x_5)=\{x_1,x_4,x_5\}$,$S(x_2)=S(x_7)=S(x_8)=\{x_2,x_7,x_8\}$,$S(x_3)=S(x_6)=\{x_3,x_6\}$。

设有对象子集 $Z=\{x_1,x_3,x_6,x_8\}$,$W=\{x_2,x_3,x_5,x_6\}$,显然两个集合是不同的集合。由式(6)和式(7)定义的上、下近似来描述这两个不精确集合,有:$\underline{R}(Z)=\underline{R}(W)=\{x_3,x_6\}$,$\overline{R}(Z)=\overline{R}(W)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$。显然$(\underline{R}(Z),\overline{R}(Z))$和$(\underline{R}(W),\overline{R}(W))$在刻画不精确集合 Z 和 W 时,很大程度上并不能准确、合理地进行描述。因此,用本文给出的定义 8 中对象对于上、下近似的隶属度来刻画不精确集合 Z 和 W。

首先,根据式(10)和式(11),对象在集合 Z 和 W 下的特征值分别为$\hat{y}_Z=(1,0,1,0,0,1,0,1)$,$\hat{y}_W=(0,1,1,0,1,1,0,0)$;然后,将表 2 中对象间的相似度 $s_A(x,y)$代入式(10)和式(11),则$\forall x\in U$,对象对于 Z 和 W 的上、下近似的隶属度如表 3 所列。

表 3 对象对于 Z 和 W 的上、下近似的隶属度

	$\mu_{\underline{R}(Z)}(x_i)$	$\mu_{\underline{R}(W)}(x_i)$	$\mu_{\overline{R}(Z)}(x_i)$	$\mu_{\overline{R}(W)}(x_i)$
x_1	0.013	0	1	0.900
x_2	0	0.020	0.900	1
x_3	1	1	1	1
x_4	0	0	0.870	0.900
x_5	0	0.010	0.900	1
x_6	1	1	1	1
x_7	0	0	0.830	0.800
x_8	0.017	0	1	0.900

最后,根据式(12)和式(13),集合 Z 和 W 的上、下近似可以表示为:

$$\underline{R}(Z)=\frac{0.013}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0}{x_7}+\frac{0.017}{x_8}$$

$$\overline{R}(Z)=\frac{1}{x_1}+\frac{0.900}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.870}{x_4}+\frac{0.900}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0.830}{x_7}+\frac{1}{x_8}$$

$$\underline{R}(W)=\frac{0}{x_1}+\frac{0.020}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.010}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0}{x_7}+\frac{0}{x_8}$$

$$\overline{R}(W)=\frac{0.900}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.900}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}+\frac{0.800}{x_7}+\frac{0.900}{x_8}$$

$\underline{R}(Z)\neq\overline{R}(Z)$,$\underline{R}(W)\neq\overline{R}(W)$,显然 Z 和 W 是不精确集合,是不可定义的。

以上实例分析说明了在模糊信息系统中,利用 OWA 算子可以刻画出对象之间的相似性程度,利用对象相似度可以将上、下近似模糊化。显然,通过对象对于某一集合上、下近似的隶属度,能更直观、更合理地反应每个对象隶属于该集合上、下近似的具体情况,同时也能更加准确地刻画这一集合。

结束语 在模糊信息系统中,考虑到对象的属性值并不是一个精确的值,而是一个隶属度函数,本文首先利用 OWA 算子定义了对象的相似度,从而刻画出对象的相似性,并讨论了其相关性质。然后,利用对象相似度,定义了每个对象隶属于论域任意集合的上、下近似的隶属度。形式地,该过程可理解为上、下近似集合的模糊化。最后,通过实例分析说明在模糊信息系统中,利用对象相似度定义的对象对于上、下近似集合的隶属度能更直观、合理地刻画每个对象隶属于该集合上、下近似的具体情况。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough set [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11:341-356

[2] Zhang Wen-xiu,Liang Yi,Wu Wei-zhi. Information system and knowledge discovery [M]. Beijin: Science press, 2003 (in Chinese)
张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出社,2003

[3] Hu Shou-song,He Ya-qun. Theory and application of rough decision [M]. Beijin: Beihang University Press, 2006: 232-239 (in Chinese)
胡寿松,何亚群. 粗糙决策理论与应用[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2006:232-239

[4] Dubois D,Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17 (2/3): 191-209

[5] Miao Duo-qian,Li De-yi,Yao Yi-yu,et al. Uncertainty and granular computing [M]. Beijin:Science press,2011(in Chinese)
苗夺谦,李德毅,姚一豫,等. 不确定性与粒计算[M]. 北京:科学出社,2011

[6] Zhang Qing-hua, Wang Guo-yin, Xiao Yu. Approximation Sets of Rough Sets[J]. Journal of Software, 2012, 23(7): 1745-1759 (in Chinese)
张清华,王国胤,肖雨. 粗糙集的近似集[J]. 软件学报,2012,23(7):1745-1759

[7] Zhang Qing-hua,Wang Jin,Wang Guo-yin. The approximate representation of rough-fuzzy sets[J]. Chinese Journal of Computers,2015,38(7):1484-1496(in Chinese)
张清华,王进,王国胤,粗糙模糊集的近似表示[J]. 计算机学报,2015,38(7):1484-1496

[8] Feng Nan-ping,Zhou Lei. One method of fuzzy attribute reduction based on similarity degree comparison [J]. Fuzzy Systems and Mathematics,2014,28(4),64-170(in Chinese)
冯楠坪,周磊. 一种基于相似度比较的模糊属性约简方法[J]. 模糊系统与数学,2014,28(4):164-170

[9] Yang Ji-lin,Qin Ke-yun. Improved fuzzy tolerance relation in the fuzzy information system [J]. Journal of Chinese Computer Systems,2014,35(9):2131-2135(in Chinese)
杨霁琳,秦克云. 模糊信息系统中一种改进的模糊相容关系[J]. 小型微型计算机系统,2014,35(9):2131-2135

[10] Yager R R. Generalized OWA aggregation operators [J]. Fuzzy Optimization and Decision Making,2004,3(1):93-107