

一种基于块稀疏的 1 比特压缩感知重构算法

熊 杰 陈 浩 闫 斌

(电子科技大学自动化工程学院 成都 611731)

摘 要 块稀疏信号作为一种典型的稀疏信号,在压缩感知重构算法中被广泛应用研究,但是普通的重构算法并不能挖掘其内部结构,这导致重构精度得不到提高。在此基础上,针对普通的 1 比特压缩感知重构算法在块稀疏信号的重构中不能表现出良好的重构性能的问题,提出了一种专门针对块稀疏信号的 1 比特压缩感知重构算法。该算法以每一个块为重构单元,在二进制迭代硬阈值算法模型下进行重构。实验数据表明,提出的 BLOCK-BIHT 算法的重构精度比 BIHT 算法提高了 3dB。

关键词 稀疏信号,压缩感知,1 比特,二进制迭代硬阈值算法

中图分类号 TN911.72 文献标识码 A

1 Bit Compressed Sensing Reconstruction Algorithm Based on Block Sparse

XIONG Jie CHEN Hao YAN Bin

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract As a typical sparse signal, block sparse signal is widely used in compressed sensing reconstruction algorithm. But ordinary reconstruction algorithm cannot find its internal structure, which leads to the reconstruction accuracy decrease. Based on this theory, considering ordinary 1 bit compressed sensing reconstruction algorithm cannot have good performance in a block sparse signal, we proposed a specific reconstruction algorithm to solve block signal reconstruction. In this algorithm, each block is a reconstruction unit, and is executed reconstruction in binary iterative hard thresholding algorithm model. The numerical experiments show that compared with the BIHT algorithm, the precision of BLOCK-BIHT algorithm increases by 3dB.

Keywords Sparse signal, Compressed sensing, 1 bit, Binary iterative hard thresholding algorithm

压缩感知^[1-3]自 2006 年被提出后就受到广大学者的研究,该理论表明,任意的稀疏信号或者在某种基下具有稀疏的信号都能以远低于奈奎斯特采样定理的频率进行采样,然后通过非线性算法进行高精度重构。压缩感知理论和普通的采样定理区别在于,压缩感知理论中压缩感知集采样和压缩于一体,节省了大量的采样时间和存储空间,同时提高了传输的效率。随后在压缩感知的基础上又诞生了 1 比特压缩感知理论^[4],其目的是将测量值进行量化,便于计算机的存储、计算和传输,同时,量化过程仅仅需要一个简单的比较器就可以完成,而且量化后的测量值具有较高的鲁棒性和抗干扰能力。但是,将测量值进行符号化,一定程度上丢失了幅值信息,只有通过增加测量次数来弥补测量值幅度的损失,然后进行信号的重构。最早期的 1 比特压缩感知重构模型是由 PT T. Boufounos 等提出的,他们将 FPC 算法应用于 1 比特压缩感知重构中,取得了较好的重构效果,随后他又提出了符号匹配追踪(Matching Sign Pursuit, MSP)算法^[5],该算法以贪婪迭代为核心,引入了回溯原理,通过不断更换支撑集来使重构效果得到提高。随后二进制迭代硬阈值(Binary Iterative Thresholding, BIHT)算法^[6]以结构简单、重构精度高而被广泛应用,其采用梯度下降的原理,在每一步迭代过程中取前 K 个最大值,实验表明,该算法重构精度高于同类的 1 比特压缩感知重构算法。

在面对块稀疏信号的重构过程中,普通的重构算法,比如

匹配追踪(Matching Pursuit, MP)算法^[7]、正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法^[8]、符号匹配追踪(Matching Sign Pursuit, MSP)算法^[5]、二进制迭代硬阈值(Binary Iterative Hard Thresholding, BIHT)算法^[6]依然能进行信号的重构,但是这些重构算法并没有考虑信号结构的特殊性,重构的过程中破坏了其内部结构,导致重构效果只能达到一般的重构效果。在压缩感知中,有研究者将块稀疏信号和压缩感知重构算法进行了结合,提出了 BOMP 算法^[9],该算法在压缩感知领域处理块稀疏信号的时候表现出了良好的重构效果。同时,在文献[10]提出的基于块稀疏的 CoSaMP 算法同样表现出了良好的重构效果。但是,针对 1 比特压缩感知领域处理还没有相关的算法被用来专门处理块稀疏信号,因此,本文在 BIHT 算法的基础上,提出了 BLOCK-BIHT 算法,该算法旨在解决块稀疏信号下的 1 比特压缩感知信号重构。

本文第 1 节概述 1 比特压缩感知理论及块稀疏信号;第 2 节介绍 BIHT 算法及处理块稀疏信号的 BLOCK-BIHT 算法;第 3 节实验仿真对比;最后总结全文。

1 1 比特压缩感知理论及块稀疏信号

1.1 1 比特压缩感知

1 比特压缩感知的采样模型为:

$$y = \text{sign}(\Phi x) \quad (1)$$

熊 杰(1990—),男,硕士生,主要研究方向为图像处理、压缩感知,E-mail: diankejason@sina.cn。

其中, y 是测量值, x 为稀疏信号, 且其稀疏度为 K , $\Phi \in R^{M \times N}$ 为测量矩阵, $\text{sign}(x)$ 表示对 x 进行取符号的意思。同时, 为了从测量矩阵中获得输入信号的全部信息, 测量矩阵 Φ 还必须满足 RIP 条件, 即对于测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得对于任意的 K 稀疏向量都满足如下公式:

$$(1-\delta) \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1+\delta) \|x\|_2 \quad (2)$$

则称测量矩阵满足限制等距特性条件 (Restricted Isometry Property, RIP), 由于 1 比特压缩感知在测量过程中丢失了符号信息, 因此通过一个能量限定将其限定在一个 l_2 的圆上:

$$\|x\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (3)$$

同时可以用 l_0 范数来进行求解, 因此其模型变为:

$$y = \text{sign}(\Phi x) \quad \text{s. t.} \quad \|x\|_2 = 1 \quad (4)$$

1.2 块稀疏信号模型

考虑另外一种稀疏信号模型, 即块稀疏信号, 假设 $x \in R^N$ 为块稀疏信号, 稀疏度为 K 且被分成若干块, 分块形式为 $d = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, 则分块后的信号模型可以进行如下表示:

$$x = \{ \underbrace{x_1 \dots x_{d_1}}_{x[1]} \dots \underbrace{x_{d_1+1} \dots x_{d_1+d_2}}_{x[2]} \dots \underbrace{x_{N-d_m+1} \dots x_N}_{x[m]} \}^T \quad (5)$$

其中, $x[l]$ 表示第 l 个长度为 d_l 的子块, 如果 $d_1 = d_2 = \dots = d_m = \frac{N}{M}$, 则表示该信号为均匀块稀疏信号, 如果其中的子块不相等, 则为非均匀块稀疏信号; 如果 $d_1 = d_2 = \dots = d_m = \frac{N}{M} = 1$, 则块稀疏信号退化为普通的稀疏信号。

与此对应的测量矩阵 Φ 按照块稀疏信号的分块方式也可以进行相对应的分块, 分块模型如下:

$$\Phi = \{ \underbrace{\varphi_1 \dots \varphi_{d_1}}_{\Phi[1]} \dots \underbrace{\varphi_{d_1+1} \dots \varphi_{d_1+d_2}}_{\Phi[2]} \dots \underbrace{\varphi_{N-d_m+1} \dots \varphi_N}_{\Phi[m]} \} \quad (6)$$

其中, φ_i 表示测量矩阵 Φ 的第 i 列, 则基于块稀疏的 1 比特压缩感知测量模型可以更改为如下:

$$y = \sum_{l=1}^m \Phi[l] x[l] \quad (7)$$

2 块稀疏模型下的 BIHT 算法

二进制迭代硬阈值算法因结构简单, 重构精度高而被广泛应用于 1 比特压缩感知中, 其算法模型如下:

$$\begin{aligned} x^* &= \arg \min_x \| [\bar{y} \odot (\Phi x)] - \|_1 \\ \text{s. t.} \quad & \|x\|_0 = K \\ & \|x\|_2 = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

算法在每一步的迭代过程中都计算如下两个公式:

$$a^{l+1} = x^l + \frac{\tau}{2} \Phi^T (\bar{y} - A(x^l)) \quad (9)$$

$$x^{l+1} = \eta_K(a^{l+1}) \quad (10)$$

其中, 文献[6]证明了式(9)是式(8)的负梯度。 τ 代表梯度下降尺度, \bar{y} 代表测量值的符号, $A(x^l)$ 表示当前信号估计值 x^l 的测量值符号, 即 $A(x^l) = \text{sign}(\Phi x^l)$ 。 $\eta_K(v)$ 表示的是计算信号估计 v 的前 K 个最优估计。

BIHT 算法虽然具有较高的重构精度, 但是在面对具有特殊结构的块稀疏信号时, 其重构精度也退化为普通的重构精度, 因此, 为了解决这个问题, 提出了 BLOCK-BIHT 算法, 与 BIHT 算法不同的是, BLOCK-BIHT 算法以稀疏信号中的每一个分子块为单位进行信号的重构, 由于块稀疏度中的子块个数 S 小于稀疏度 K , 从某种程度上来说降低了信号重构的复杂度, 这使得算法在重构的过程中保留了块稀疏本

身固有的结构, 从而能够提高重构精度。以 l_1 范数模型下的 BLOCK-BIHT 算法为例, BLOCK-BIHT 算法流程如下。

输入: 测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$, 信号稀疏度 K , 块稀疏度 S , $d = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, 测量值 \bar{y}

输出: 重构信号 x

1. 初始化信号估计 $\hat{x} = 0$, 残差 $r_0 = y$, 迭代次数 $l = 1$;

2. 计算如下公式:

$$a^{l+1} = x^l + \frac{\tau}{2} \Phi^T (\bar{y} - A(x^l))$$

3. 计算每一块的二范数值:

$$g_i = \text{norm}(\hat{x}_{d_i})$$

其中, $i = \{1, 2, \dots, m\}$, $\text{norm}(x)$ 表示求解 x 的二范数值, d_i 表示对信号的第 i 个分块;

4. 取 g 的前 K 个最大值:

$$\hat{x}_1 = H_K(g_i)$$

5. 对 \hat{x}_1 进行归一化处理;

6. 若算法满足停止条件, 则停止迭代, 输出重构信号 \hat{x}_1 ; 否则 $l = l + 1$, 跳至步骤 2。

由 BLOCK-BIHT 算法流程可以看出, BLOCK-BIHT 算法结构简单, 形式简洁, 和 BIHT 算法不同的是, BLOCK-BIHT 算法计算的是分块过后的二范数值, 且计算的是块稀疏度 S , 小于信号的稀疏度 K , 从某种角度上来说降低了算法的复杂度, 并且在文献[9]中的实验部分也证明了块稀疏算法具有优越的性能。

3 实验仿真结果及对比分析

本实验环节将进行均匀块稀疏的信号重构和非均匀块稀疏信号重构的对比, 其中 BIHT, L2 算法代表 l_2 范数下的 BIHT 算法, BLOCK, BIHT, L2 代表 l_2 范数下的 BLOCK-BIHT 算法, 对比算法还包括 FBMSM 算法[11]、BIHT 算法、BLOCK-BIHT 算法。为防止实验的偶然性, 取 20 次实验的平均值作为最终结果。实验均在 CPU Intel(R) Core(TM)2 Duo, 主频 2.00GHz, 内存 3.00GB 的 32 位机上的 Matlab2012 上运行。

(1) 重构 MSE 仿真结果

图 1 中重构 MSE 的计算公式如下:

$$MSE_{(dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{\| \hat{x} - x \|_2^2}{\| x \|_2^2} \right) \quad (10)$$

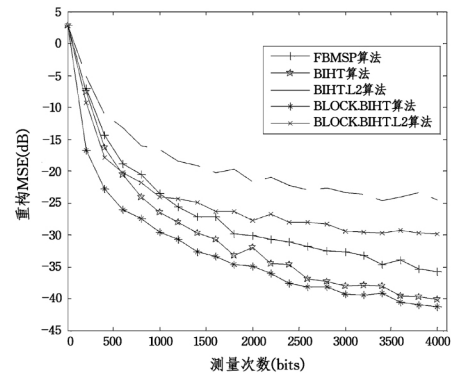


图 1 均匀块稀疏的重构结果对比

由图 1 可知, 在处理均匀块稀疏信号过程中, 在 5 个比较高效的算法中, BLOCK-BIHT 算法重构效果最好, 其次是 BIHT 算法, FBMSM 算法在高比特的时候重构效果高于 BIHT 算法, 最后是 l_2 范数下的 BLOCK-BIHT 算法和 l_2 范

数下的 BIHT 算法。由图 2 可知,在非均匀块稀疏信号的情况下, l_1 范数下的 BLOCK-BIHT 算法具有最好的重构效果,最理想情况下 l_1 范数下的 BLOCK-BIHT 算法重构效果比 l_1 范数下的 BIHT 算法高 17dB。高比特情况下,FBMSP 算法高于 l_1 范数下的 BIHT 算法,其次是 l_2 范数下的 BLOCK-BIHT 算法,最后是 l_2 范数下的 BIHT 算法。由上面的数据分析可以得出如下结论:提出的 BLOCK-BIHT 算法在处理块稀疏信号时具有最好的重构效果。

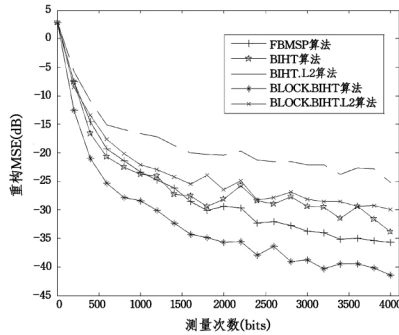


图 2 非均匀块稀疏重构结果对比

(2) 不同块稀疏度的重构质量

在本次实验环节中,由于涉及的是分块的个数,且每个块所含的元素是固定的,因此不适合做非均匀块稀疏信号下的实验对比,此部分实验仅设置为均匀块稀疏信号实验。实验中,取每个块的稀疏度固定为 2,块稀疏度为 $S=1:2:15$,则信号的稀疏度为 $K=2:4:30$,测量次数 $M=256$,其他条件不变,实验结果如图 3 所示。

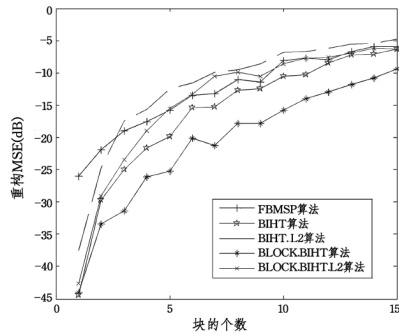


图 3 不同块个数下的重构 MSE 对比

由图 3 可见,在 5 个重构算法中,BLOCK-BIHT 算法的重构效果最好,其次是 BIHT 算法,在块的个数增大时,FBMSP 算法比 l_2 范数下的 BLOCK-BIHT 算法和 l_2 范数下的 BIHT 算法好一些。在图 3 中随着块的个数的增加,BLOCK-BIHT 算法的重构效果都能和其他几个算法拉开较大的差距。当块稀疏度 $S=10$ 时,BLOCK-BIHT 算法比 BIHT 算法高出 6dB,比 l_2 范数下的 BIHT 算法高出 8dB。

(3) 重构时间和 MSE 对比

在本次实验中,为了评估各个算法重构所需要的时间,取测量次数 $M=2000$,其他设置同实验 1 一致,分别在均匀块和非均匀块稀疏信号的情况下对各个算法进行对比。实验结果如表 1 和表 2 所列。

表 1 均匀块稀疏信号下 5 种算法重构时间和 MSE 对比

算法	FBMSP	BIHT	BIHT.L2	BLOCK.BIHT	BLOCK.BIHT.L2
时间(s)	0.91	0.19	1.63	0.78	1.69
MSE(dB)	29.85	33.24	20.77	36.38	26.78

表 2 非均匀块稀疏信号下 5 种算法重构时间和 MSE 对比

算法	FBMSP	BIHT	BIHT.L2	BLOCK.BIHT	BLOCK.BIHT.L2
时间(s)	1.31	0.33	2.21	0.91	2.23
MSE(dB)	30.00	27.80	20.93	35.82	26.14

由表 1 可以看出,在均匀块稀疏信号重构中,BLOCK-BIHT 在重构 MSE 上占有绝对优势,另外在重构所花费的时间上,BIHT 算法因结构简单、运算量低而花费的时间最少,提出的 BLOCK-BIHT 算法所花费的时间为 0.78s,比 BIHT 算法多消耗了 0.4s,这是由于 BLOCK-BIHT 算法在算法迭代过程中的第三步引入了块稀疏的概念,把求解前 K 个最大值转换为求解前 S 个最大值,然后再根据块稀疏的 S 分量的分布求解前 K 个最大值,这就导致该算法相比 BIHT 算法多消耗了部分时间。表 2 的非均匀块稀疏重构结果和均匀块稀疏模型下的重构结果类似,只是在非均匀块稀疏模型下 FBMSP 算法的重构效果要比 BIHT 算法更理想。

结束语 本文在深入研究了 1 比特压缩感知理论知识的基础上,针对稀疏信号中的块稀疏信号进行了分析,指出块稀疏信号和普通信号具有结构上的不同,并根据稀疏的结构把块稀疏信号分为均匀块稀疏信号和非均匀块稀疏信号。同时把块稀疏信号引入到 1 比特压缩感知重构算法中,提出了 BLOCK-BIHT 算法。提出的算法对块稀疏信号进行分块处理,降低了算法的运算复杂度,在处理块稀疏信号时比其他同类算法具有更好的重构效果。

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306
- [2] Candès E J. Compressive sampling [C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Madrid, 2006. 2006: 1433-1452
- [3] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509
- [4] Boufounos P T, Baraniuk R G. 1-bit compressive sensing[C]//Proceedings of the 42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems. 2008: 16-21
- [5] Boufounos P. Greedy sparse signal reconstruction from sign measurements[C]//Proceedings of the 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 1305-1309
- [6] Jacques L, Laska J N, Boufounos P T, et al. Robust 1-bit compressive sensing via binary stable embeddings of sparse vectors [J]. arXiv preprint arXiv:1104.3160, 2011
- [7] Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415
- [8] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666
- [9] Eldar Y C, Kuppinger P, Bölcskei H. Compressed sensing of block-sparse signals: Uncertainty relations and efficient recovery [J]. arXiv preprint arXiv:0906.3173, 2009
- [10] 陈鹏, 王成, 孟晨. 基于约束等距的块稀疏压缩采样匹配追踪算法[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 239-245
- [11] 闫斌, 陈浩, 王文东, 等. 一种基于盲运算的 1 比特压缩感知重建算法[J]. 西南交通大学学报, 2015, 50(2): 264-269