

# Gödel $n$ 值命题逻辑系统中命题公式的 $t$ 真度及近似推理

朱乃调 惠小静 高晓莉

(延安大学数学与计算机科学学院 延安 716000)

**摘 要** 通过增加两类算子 $\sim$ 和 $\Delta$ 对 Gödel  $n$  值命题逻辑系统进行公理化扩张  $Gödel_{\sim,\Delta}$ , 简记为  $G_{\sim,\Delta}$ 。在  $Gödel_{\sim,\Delta}$  中提出了命题公式的  $t$  真度的定义( $t$  任取 $\sim, \Delta$ ), 讨论了  $t$  真度的 MP 规则、HS 规则、交推理规则、并推理规则以及它的一些相关性质; 得到了命题公式间的  $t$  相似度和  $t$  伪距离的概念以及它们的一些相关性质; 最后在  $t$  逻辑度量空间中提出了 3 种不同的近似推理模式, 并证明了 3 种近似推理模式间的等价性。

**关键词**  $t$  真度,  $t$  相似度,  $t$  逻辑度量空间, 近似推理

中图法分类号 O142 文献标识码 A

## $t$ Truth Degree of Formulas and Approximate Reasoning in Gödel $n$ -valued Propositional Logic System

ZHU Nai-diao HUI Xiao-jing GAO Xiao-li

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

**Abstract** By adding new operators  $\Delta$  and  $\sim$ , axiomatic expansion of Gödel  $n$ -valued propositional logic system is introduced, which is denoted as  $Gödel_{\sim,\Delta}$ . In this paper, the definition of  $t$  truth degree of propositional formula was put forward ( $t$  take  $\Delta, \sim$ ), and the MP rule, HS rule, meet and union inference rules and some related properties of  $t$  truth degree were discussed. The concepts of  $t$  similarity degree,  $t$  pseudo-metric between propositional formulas and their some related properties are obtained. Three different types of approximate reasoning patterns are introduced in logic metric space, and they are proved to be equivalent.

**Keywords**  $t$  truth degree,  $t$  similarity degree,  $t$  logic metric space, Approximate reasoning

## 1 引言

自 Pavelka 在 20 世纪 70 年代提出命题逻辑程度化的思想后<sup>[1-3]</sup>, 大多数学者在这一领域展开了相关研究<sup>[4-18]</sup>。目前受到大家广泛关注的逻辑系统中, 由于 Gödel 命题逻辑系统和 Goguen 命题逻辑系统中的否定具有强否定性而使其研究受到了巨大阻碍。为了解决这一问题, 文献<sup>[19-23]</sup>引入了基本连接词对合否定 $\sim$ 和逻辑连接词 $\Delta$ , 并提出了基本逻辑系统  $BL$  的公理化扩张  $BL_{\Delta}$  系统, 并与对合否定结合建立了  $SBL_{\sim}$  系统, 在该系统中  $\Delta$  演绎定理和强完备性定理均成立, 从而使相关研究得以顺利开展。对合否定 $\sim$ 和 $\Delta$ 算子的运算形式分别是 $\sim x = 1 - x$ ,  $\Delta x = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$ , 其目的是实现模糊到分明的转化。我们知道模糊推理的已知条件都可以转化为模糊命题, 结论也是模糊命题, 因此推理的本质是讨论命题集对某个命题的蕴涵关系。同时模糊命题的真值反映了模糊命题的本质, 所以通常把命题和真值同等看待。在对模糊命题进行处理的实际过程中, 本质上是对命题的真值进行处理。在模糊推理中, 最终需要进行模糊化, 对合否定 $\sim$ 和 $\Delta$ 算子为此提供了可能。真度作为真值的另一种表现形式, 在其中

引入基本连接词对合否定 $\sim$ 和逻辑连接词 $\Delta$ 就成为必然。

正因如此, 文献<sup>[24]</sup>在带有对合否定的 $\Delta$ 模糊逻辑系统  $SBL_{\sim}$  中, 以推理中命题的真值为基础, 运用 $\Delta$ 转换词, 在  $SBL_{\sim}$  公理化扩张系统中建立了推理中前提与结论的真值关系定理, 从而实现了 $\Delta$ 模糊逻辑系统的计量化。

本文以增加新的连接词 $\sim, \Delta$ 对 Gödel  $n$  值命题逻辑系统进行公理化扩张  $Gödel_{\sim,\Delta}$  ( $G_{\sim,\Delta}$ ) 为基础, 提出了命题公式的  $t$  真度的定义( $t$  任取 $\sim, \Delta$ ), 讨论了  $t$  真度的 MP 规则、HS 规则、交推理规则、并推理规则以及它的一些相关性质; 得到了命题公式间的  $t$  相似度和  $t$  伪距离的概念以及它们的一些相关性质; 最后在  $t$  逻辑度量空间中提出了 3 种不同的近似推理模式, 并证明了 3 种近似推理模式间的等价性。

## 2 预备知识

定义 1<sup>[17]</sup>  $BL_{\Delta}$  的公理系统如下:

(BL)  $BL$  的公理系统;

( $\Delta 1$ )  $\Delta A \vee \rightarrow \Delta A$ ;

( $\Delta 2$ )  $\Delta(A \vee B) \rightarrow (\Delta A \vee \Delta B)$ ;

( $\Delta 3$ )  $\Delta A \rightarrow B$ ;

( $\Delta 4$ )  $\Delta A \rightarrow \Delta \Delta A$ ;

本文受国家自然科学基金(11471007), 陕西省自然科学基金(2014JM1020), 多专业融合应用型人才培养模式创新实验区项目, 延安大学研究生创新基金资助项目资助。

朱乃调(1990—), 女, 硕士生, 主要研究方向为不确定性推理, E-mail: 792266404@qq.com; 惠小静(1973—), 女, 博士, 教授, 主要研究方向为不确定性推理; 高晓莉(1992—), 女, 硕士生, 主要研究方向为不确定性推理。

( $\Delta 5$ )  $\Delta(A \rightarrow B) \rightarrow (\Delta A \rightarrow \Delta B)$ 。

$BL_{\Delta}$  中的推理规则为 MP 规则和  $\Delta$  规则, MP 规则为从  $A, A \rightarrow B$  推得  $B$ ,  $\Delta$  规则为从  $A$  推得  $\Delta A$ 。

定义 2<sup>[18]</sup> 作为  $SBL$  的公理化扩张,  $SBL_{\sim}$  的公理系统如下:

( $SBL$ )  $SBL$  的公理系统;

( $\sim 1$ )  $\sim \sim A \rightarrow A$ ;

( $\sim 2$ )  $A \rightarrow \sim \sim A$ ;

( $\sim 3$ )  $\Delta(A \rightarrow B) \rightarrow \Delta(\sim B \rightarrow \sim A)$ 。

$SBL_{\sim}$  中的推理规则也为 MP 规则和  $\Delta$  规则。如果  $L$  是  $SBL$  的公理化扩张, 那么把  $L_{\sim}$  记为  $L$  的扩张, 其方式恰如  $SBL$  扩张为  $SBL_{\sim}$  一样。

定理 1<sup>[19]</sup> ( $\Delta$  演绎定理) 令  $L$  是  $BL_{\Delta}$  的公理化扩张, 对任意理论  $\Gamma$ , 公式  $A$  和  $B$ , 有  $\Gamma, A \vdash B$  当且仅当  $\Gamma \vdash \Delta A \rightarrow B$ 。

定理 2<sup>[18]</sup> (强完备性定理) 令  $L$  是  $BL_{\Delta}$  的公理化扩张, 那么对理论  $\Gamma$  和公式  $A$ , 下面条件等价:

(1)  $\Gamma \vdash A$ ;

(2) 对每个  $L$  代数  $B$  和理论  $\Gamma$  的每个模型  $e$ , 均有  $e(A) = 1$ 。

### 3 命题公式的 $t$ 真度的定义及其性质

定义 3 设  $S = \{p_1, p_2, \dots\}$  是可数集,  $\sim, \Delta$  分别是  $S$  上的一元运算,  $\vee, \wedge \rightarrow$  分别是  $S$  上的二元运算,  $F(S)$  是由  $S$  生成的  $(1, 1, 2, 2, 2)$  型自由代数, 则称  $F(S)$  中的元为命题公式或公式, 称  $S$  中的元为原子公式。

定义 4 设  $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ , 则  $A$  对应一个  $n$  值  $m$  元函数  $\bar{A}$ , 在  $G_{\sim, \Delta}$  中,  $\bar{A}: \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}^m \rightarrow [0, 1]$ , 这里  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  是由运算符号  $\sim, \Delta, \vee, \wedge, \rightarrow$  把  $x_1, x_2, \dots, x_m$  连接而成, 其方式恰如  $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ , 由连接词  $\sim, \Delta, \vee, \wedge, \rightarrow$  将原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$  连接而成一样, 则称  $\bar{A}$  是公式  $A$  所诱导的函数。

定义 5 设  $L = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ , 在  $L$  中规定: 对  $\forall x, y \in L$ ,  $\sim x = 1 - x$ ,  $\Delta x = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$ ,  $x \vee y = \max\{x, y\}$ ,  $x \wedge y = \min\{x, y\}$ ,  $x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$ , 则  $L$  成为  $(1, 1, 2, 2, 2)$  型代数, 称其为 Gödel  $n$  值命题逻辑系统的扩张, 简记为  $G_{\sim, \Delta}$ 。若无特殊说明, 均是在  $G_{\sim, \Delta}$  中展开的, 且  $l, m, n, t$  表示任取  $\sim$  和  $\Delta$ 。

定义 6 设  $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$  是含有  $m$  个原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$  的命题公式,  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  是公式  $A$  所诱导的函数, 令

$$\tau_n(tA) = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{tA}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

则称  $\tau_n(tA)$  为公式  $A$  的  $t$  真度。

定理 3 设  $A, B \in F(S)$ , 则

(1)  $A$  为重言式当且仅当  $\tau_n(\Delta A) = 1, \tau_n(\sim A) = 0$ ;  $A$  为矛盾式当且仅当  $\tau_n(\sim A) = 1$ 。

(2) 若  $A$  为矛盾式, 则  $\tau_n(\Delta A) = 0$ , 反之不成立。

(3)  $A \approx B$  当且仅当  $\tau_n(tA) = \tau_n(tB)$ 。

• 98 •

(4)  $\tau_n(\sim A) = 1 - \tau_n(A), \tau_n(\sim \Delta A) = 1 - \tau_n(\Delta A)$ 。

(5) 若  $\vdash A \rightarrow B$ , 则  $\tau_n(\Delta A) \leq \tau_n(\Delta B), \tau_n(\sim A) \geq \tau_n(\sim B)$ 。

证明: (1) 对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 由于  $A$  为重言式当且仅当  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1, \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1, \bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$  当且仅当  $\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1, \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ 。

因此根据定义 6 得:

$$\tau_n(\Delta A) = 1, \tau_n(\sim A) = 0$$

同理, 由于  $A$  为矛盾式当且仅当  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , 当且仅当  $\bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ , 当且仅当  $\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ , 因此根据定义 6 得:

$$\tau_n(\sim A) = 1$$

(2) 若  $A$  为矛盾式, 则  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , 即有  $\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , 因此根据定义 6 得,  $\tau_n(\Delta A) = 0$ 。

反之, 若  $\tau_n(\Delta A) = 0$ , 则  $\bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 1$ , 即  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 1$ , 所以只要  $A$  不是重言式就可以得到  $\tau_n(\Delta A) = 0$ 。

(3) 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ 。对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 由于  $A \approx B$ , 当且仅当  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \bar{B}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 当且仅当  $\bar{tA}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \bar{tB}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 当且仅当

$$\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{tA}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{tB}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

因此根据定义 6 得:

$$\tau_n(tA) = \tau_n(tB)$$

(4) 对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 由于  $\bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m), \bar{\sim \Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 因此有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\sim A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1 - \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \bar{\sim \Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1 - \bar{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

故根据定义 6 得:

$$\tau_n(\sim A) = 1 - \tau_n(A), \tau_n(\sim \Delta A) = 1 - \tau_n(\Delta A)$$

(5) 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ 。对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 由于  $\vdash A \rightarrow B$ , 因此有  $\bar{A \rightarrow B}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ 。又由于

$$\begin{aligned} & \bar{A \rightarrow B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow \bar{B}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 \end{aligned}$$

因此有  $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq \bar{B}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 。

结合  $\Delta, \sim$  的特性知,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) &\leq \overline{\Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \sim A(x_1, x_2, \dots, x_m) &\geq \sim B(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \leq \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \sim A(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \geq \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \sim B(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

所以根据定义 6 得:

$$\tau_n(\Delta A) \leq \tau_n(\Delta B), \tau_n(\sim A) \geq \tau_n(\sim B)$$

定理 4 设  $A, B \in F(S)$ , 则

$$\tau_n(mA \vee nB) = \tau_n(mA) + \tau_n(nB) - \tau_n(mA \wedge nB)$$

证明: 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ 。对  $\forall a, b \in G_n$ , 有  $ma \vee nb = ma + nb - ma \wedge nb$ , 所以对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 则有

$$\begin{aligned}\overline{mA \vee nB}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \overline{mA}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \overline{nB}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ \overline{mA \wedge nB}(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{mA \vee nB}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{mA}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \\ \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{nB}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{mA \wedge nB}(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

故根据定义 6 得,

$$\tau_n(mA \vee nB) = \tau_n(mA) + \tau_n(nB) - \tau_n(mA \wedge nB)$$

定理 5 设  $A, B \in F(S)$ , 则

$$(1) \tau_n(\Delta A \rightarrow \sim B) = \tau_n(\Delta A \wedge \sim B) - \tau_n(\Delta A) + 1.$$

$$(2) \tau_n(\Delta A \rightarrow \Delta B) = \tau_n(\Delta A \wedge \Delta B) - \tau_n(\Delta A) + 1.$$

$$(3) \tau_n(\Delta A \rightarrow B) = \tau_n(\Delta A \wedge B) - \tau_n(\Delta A) + 1.$$

证明: 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ 。

(1) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有  $\Delta a \rightarrow \sim b = \Delta a \wedge \sim b - \Delta a + 1$ 。所以对

对  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 则有  $\overline{\Delta A \rightarrow \sim B}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \overline{\Delta A \wedge \sim B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + 1$ 。

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \rightarrow \sim B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \wedge \sim B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1\end{aligned}$$

两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再根据定义 6 得,

$$\tau_n(\Delta A \rightarrow \sim B) = \tau_n(\Delta A \wedge \sim B) - \tau_n(\Delta A) + 1$$

(2) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有  $\Delta a \rightarrow \Delta b = \Delta a \wedge \Delta b - \Delta a + 1$ 。所以对

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 则有

$$\begin{aligned}\overline{\Delta A \rightarrow \Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \overline{\Delta A \wedge \Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + 1\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \rightarrow \Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \wedge \Delta B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1\end{aligned}$$

两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再根据定义 6 得,

$$\tau_n(\Delta A \rightarrow \Delta B) = \tau_n(\Delta A \wedge \Delta B) - \tau_n(\Delta A) + 1$$

(3) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有  $\Delta a \rightarrow b = \Delta a \wedge b - \Delta a + 1$ 。所以对

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 则有

$$\overline{\Delta A \rightarrow B}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \overline{\Delta A \wedge B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + 1$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \rightarrow B}(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A \wedge B}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{\Delta A}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1\end{aligned}$$

两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再根据定义 6 得,

$$\tau_n(\Delta A \rightarrow B) = \tau_n(\Delta A \wedge B) - \tau_n(\Delta A) + 1$$

定理 6 设  $A, B, C \in F(S)$ , 则

$$(1) \tau_n(\Delta A \rightarrow (\sim B \vee \sim C)) + \tau_n(\Delta A \rightarrow (\sim B \wedge \sim C)) = \tau_n(\Delta A \rightarrow \sim B) + \tau_n(\Delta A \rightarrow \sim C).$$

$$(2) \tau_n((\Delta A \vee \Delta B) \rightarrow \Delta C) + \tau_n((\Delta A \wedge \Delta B) \rightarrow \Delta C) = \tau_n(\Delta A \rightarrow \Delta C) + \tau_n(\Delta B \rightarrow \Delta C).$$

$$(3) \tau_n((\Delta A \vee B) \rightarrow (\Delta A \wedge B)) = \tau_n(\Delta A \rightarrow B) + \tau_n(B \rightarrow \Delta A) - 1.$$

证明: 设  $A, B, C$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ 。

(1) 根据定理 4 和定理 5(1) 得:

$$\begin{aligned}\tau_n(\Delta A \rightarrow (\sim B \vee \sim C)) + \tau_n(\Delta A \rightarrow (\sim B \wedge \sim C)) \\ = \tau_n(\Delta A \wedge (\sim B \vee \sim C)) - \tau_n(\Delta A) + 1 + \tau_n(\Delta A \wedge \sim B \wedge \sim C) - \tau_n(\Delta A) + 1 \\ = \tau_n((\Delta A \wedge \sim B) \vee (\Delta A \wedge \sim C)) + \tau_n((\Delta A \wedge \sim B) \wedge (\Delta A \wedge \sim C)) - 2\tau_n(\Delta A) + 2 \\ = \tau_n(\Delta A \wedge \sim B) + \tau_n(\Delta A \wedge \sim C) - 2\tau_n(\Delta A) + 2 \\ = \tau_n(\Delta A \rightarrow \sim B) + \tau_n(\Delta A \rightarrow \sim C)\end{aligned}$$

(2) 根据定理 4 和定理 5(2) 得:

$$\begin{aligned}\tau_n((\Delta A \vee \Delta B) \rightarrow \Delta C) + \tau_n((\Delta A \wedge \Delta B) \rightarrow \Delta C) \\ = \tau_n((\Delta A \vee \Delta B) \wedge \Delta C) - \tau_n(\Delta A \vee \Delta B) + 1 + \tau_n((\Delta A \wedge \Delta B) \wedge \Delta C) - \tau_n(\Delta A \wedge \Delta B) + 1 \\ = \tau_n((\Delta A \wedge \Delta C) \vee (\Delta B \wedge \Delta C)) - \tau_n(\Delta A \vee \Delta B) + 1 + \tau_n((\Delta A \wedge \Delta C) \wedge (\Delta B \wedge \Delta C)) - \tau_n(\Delta A \wedge \Delta B) + 1 \\ = \tau_n(\Delta A \wedge \Delta C) + \tau_n(\Delta B \wedge \Delta C) - \tau_n(\Delta A) - \tau_n(\Delta B) + 2 \\ = \tau_n(\Delta A \rightarrow \Delta C) + \tau_n(\Delta B \rightarrow \Delta C)\end{aligned}$$

(3) 根据定理 4 和定理 5(3) 得:

$$\begin{aligned}\tau_n((\Delta A \vee B) \rightarrow (\Delta A \wedge B)) \\ = \tau_n((\Delta A \vee B) \wedge (\Delta A \wedge B)) - \tau_n(\Delta A \vee B) + 1 \\ = \tau_n(\Delta A \vee B) + \tau_n(\Delta A \wedge B) - \tau_n((\Delta A \vee B) \vee (\Delta A \wedge B)) - \tau_n(\Delta A \vee B) + 1 \\ = \tau_n(\Delta A \wedge B) - \tau_n(\Delta A \vee B) + 1 \\ = \tau_n(\Delta A \wedge B) - (\tau_n(\Delta A) + \tau_n(B) - \tau_n(\Delta A \wedge B)) + 1\end{aligned}$$

$$= \tau_n(\Delta A \wedge B) - \tau_n(\Delta A) + 1 + \tau_n(B \rightarrow \Delta A) - \tau_n(B) + 1 - 1 \\ = \tau_n(\Delta A \rightarrow B) + \tau_n(B \rightarrow \Delta A) - 1$$

定理 7 设  $A, B, C \in F(S)$ ,

(1) (t 真度的 MP 规则) 若  $\tau_n(mA) \geq \alpha, \tau_n(mA \rightarrow nB) \geq \beta$ , 则  $\tau_n(nB) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

(2) (t 真度的 HS 规则) 若  $\tau_n(mA \rightarrow nB) \geq \alpha, \tau_n(nB \rightarrow lC) \geq \beta$ , 则  $\tau_n(mA \rightarrow lC) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

证明: 设  $A, B, C$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ,  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m$ ,

(1) 对  $\forall a, b, c \in G_n$ , 有  $nb \geq ma + (ma \rightarrow nb) - 1$ , 所以有  $\overline{nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \overline{ma}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \overline{ma \rightarrow nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) - 1$ 。

$$\text{因此有 } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{ma}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{ma \rightarrow nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1。$$

两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再根据定义 6 得,

$$\tau_n(nB) \geq \tau_n(mA) + \tau_n(mA \rightarrow nB) - 1 \geq \alpha + \beta - 1$$

(2) 对  $\forall a, b, c \in G_n$ , 有  $ma \rightarrow lc \geq ma \rightarrow nb + nb \rightarrow lc - 1$ , 所以有  $\overline{ma \rightarrow lc}(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \overline{ma \rightarrow nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \overline{nb \rightarrow lc}(x_1, x_2, \dots, x_m) - 1$ 。

$$\text{因此有 } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{ma \rightarrow lc}(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{ma \rightarrow nb}(x_1, x_2, \dots, x_m) + \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{nb \rightarrow lc}(x_1, x_2, \dots, x_m) - \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} 1$$

两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再根据定义 6 得,

$$\tau_n(mA \rightarrow lC) \geq \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow lC) - 1 \geq \alpha + \beta - 1$$

定理 8 设  $A, B, C \in F(S)$ , 则

$$\tau_n(mA \rightarrow (nB \wedge lC)) = \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(mA \rightarrow lC) - \tau_n((mA \rightarrow nB) \vee (mA \rightarrow lC))$$

证明: 设  $A, B, C$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , 对  $\forall a, b, c \in G_n$ , 有  $ma \rightarrow (nb \wedge lc) = (ma \rightarrow nb) \wedge (ma \rightarrow lc)$ , 所以有  $ma \rightarrow (nb \wedge lc) \approx (ma \rightarrow nb) \wedge (ma \rightarrow lc)$ , 根据定理 3 (3) 得:

$$\tau_n(mA \rightarrow (nB \wedge lC)) = \tau_n((mA \rightarrow nB) \wedge (mA \rightarrow lC))$$

再结合定理 4 得,

$$\tau_n(mA \rightarrow (nB \wedge lC)) = \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(mA \rightarrow lC) - \tau_n((mA \rightarrow nB) \vee (mA \rightarrow lC))$$

推论 1 (t 真度交推理规则) 设  $A, B, C \in F(S)$ , 若  $\tau_n(mA \rightarrow nB) \geq \alpha, \tau_n(mA \rightarrow lC) \geq \beta$ , 则  $\tau_n(mA \rightarrow (nB \wedge lC)) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

定理 9 设  $A, B, C \in F(S)$ , 则

$$\tau_n((mA \vee nB) \rightarrow lC) = \tau_n(mA \rightarrow lC) + \tau_n(nB \rightarrow lC) - \tau_n((mA \rightarrow lC) \vee (nB \rightarrow lC))$$

证明: 设  $A, B, C$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , 对  $\forall a, b, c \in G_n$ , 有  $(ma \vee nb) \rightarrow lc = (ma \rightarrow lc) \wedge (nb \rightarrow lc)$ , 所以有  $(mA \vee nB) \rightarrow lC \approx (mA \rightarrow lC) \wedge (nB \rightarrow lC)$ , 根据定理 3 (3) 得:

$$\tau_n((mA \vee nB) \rightarrow lC) = \tau_n((mA \rightarrow lC) \wedge (nB \rightarrow lC))$$

再结合定理 4 得,

$$\tau_n((mA \vee nB) \rightarrow lC) = \tau_n(mA \rightarrow lC) + \tau_n(nB \rightarrow lC) - \tau_n((mA \rightarrow lC) \vee (nB \rightarrow lC))$$

推论 2 (t 真度并推理规则) 设  $A, B, C \in F(S)$ , 若  $\tau_n(mA \rightarrow lC) \geq \alpha, \tau_n(nB \rightarrow lC) \geq \beta$ , 则  $\tau_n((mA \vee nB) \rightarrow lC) \geq \alpha + \beta - 1$ 。

定理 10 在  $G_{\sim, \Delta}$  中, 将命题公式中的一个原子命题换成它的对合否定, 公式的 t 真度不变。

证明: 设  $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$  是含有  $m$  个原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$  的命题公式。把  $A$  中的原子命题  $p_i$  换成  $\sim p_i$ , 公式  $A$  变成公式  $B$ , 即  $A(p_1, \dots, p_{i-1}, \sim p_i, p_{i+1}, \dots, p_m) = B(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_m)$ , 因此, 对任意的  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \in G_n^m$ , 则有  $\overline{tA}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = \overline{tB}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$ 。

令映射  $\Phi: G_n^m \rightarrow G_n^m$ , 满足  $\Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$ 。

由于  $G_n$  中的元素关于  $\frac{1}{2}$  对称, 因此  $\Phi: G_n^m \rightarrow G_n^m$  为一一对应的映射, 故有

$$\begin{aligned} & \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tA}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tA}(\Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)) \\ &= \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tA}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tB}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &\text{因此, } \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tA}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in G_n^m} \overline{tB}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)。 \end{aligned}$$

给两边同时乘以  $\frac{1}{n^m}$ , 再结合定义 6 得,  $\tau_n(tA) = \tau_n(tB)$ 。

由此进一步可得, 把公式  $A$  中所含原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$  的部分公式分别换成它的对合否定, 公式  $A$  的 t 真度不变。

推论 3 将命题公式中的所有原子命题与该原子命题的对合否定互换, 公式的 t 真度不变。

## 4 公式间的相似度与伪距离

定义 7 设  $A, B \in F(S)$ , 令

$$\xi_n(mA, nB) = \tau_n((mA \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow mA))$$

则称  $\xi_n(mA, nB)$  为命题公式  $A$  与  $B$  之间的 t 相似度。

定理 11 设  $A, B \in F(S)$ , 则

(1) 若  $A \approx B$ , 则  $\xi_n(tA, tB) = 1$ 。

(2)  $\xi_n(mA, nB) = \xi_n(nB, mA)$ 。

(3)  $\xi_n(mA \vee nB, mA) = \tau_n(nB \rightarrow mA)$ 。

(4)  $\xi_n(mA \wedge nB, mA) = \tau_n(mA \rightarrow nB)$ 。

(5)  $\xi_n(mA \rightarrow nB, nB) = \tau_n(mA \vee nB)$ 。

(6)  $\xi_n(mA \rightarrow nB, mA \wedge nB) = \tau_n(mA)$ 。

证明: 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ,

(1) 由于  $A \approx B$  知,  $tA \approx tB$ , 则有  $\vdash (tA \rightarrow tB) \wedge (tB \rightarrow tA)$ , 根据定义 6 可知,  $\tau_n((tA \rightarrow tB) \wedge (tB \rightarrow tA)) = 1$ , 再结合定义 7 得,  $\xi_n(tA, tB) = 1$ 。

(2) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有  $(ma \rightarrow nb) \wedge (nb \rightarrow ma) = (nb \rightarrow ma) \wedge$

$(ma \rightarrow nb)$ , 从而有  $(mA \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow mA) \approx (nB \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow nB)$ , 根据定理 3(3) 知,

$$\tau_n((mA \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow mA)) = \tau_n((nB \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow nB))$$

再结合定义 7 得,  $\xi_n(mA, nB) = \xi_n(nB, mA)$ 。

(3) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有

$$\begin{aligned} (ma \vee nb) \rightarrow ma &= (ma \rightarrow ma) \wedge (nb \rightarrow ma) \\ &= nb \rightarrow ma \\ ma \rightarrow (ma \vee nb) &= (ma \rightarrow ma) \vee (ma \rightarrow nb) \\ &= ma \rightarrow ma \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \xi_n(mA \vee nB, mA) &= \tau_n(((mA \vee nB) \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow (mA \vee nB))) \\ &= \tau_n(((mA \rightarrow mA) \wedge (nB \rightarrow mA)) \wedge ((mA \rightarrow mA) \vee (mA \rightarrow nB))) \\ &= \tau_n((nB \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow mA)) \\ &= \tau_n(nB \rightarrow mA) \\ (4) \text{ 对 } \forall a, b \in G_n, \text{ 有} \\ (ma \wedge nb) \rightarrow ma &= (ma \rightarrow ma) \vee (nb \rightarrow ma) \\ &= ma \rightarrow ma \\ ma \rightarrow (ma \wedge nb) &= (ma \rightarrow ma) \wedge (ma \rightarrow nb) \\ &= ma \rightarrow nb \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} \xi_n(mA \wedge nB, mA) &= \tau_n(((mA \wedge nB) \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow (mA \wedge nB))) \\ &= \tau_n(((mA \rightarrow mA) \vee (nB \rightarrow mA)) \wedge ((mA \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow nB))) \\ &= \tau_n((mA \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow nB)) \\ &= \tau_n(mA \rightarrow nB) \\ (5) \text{ 对 } \forall a, b \in G_n, \text{ 有 } ((ma \rightarrow nb) \rightarrow nb) \wedge (nb \rightarrow (ma \rightarrow nb)) &= \\ ma \vee nb, \text{ 从而有} \end{aligned}$$

$$((mA \rightarrow nB) \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow (mA \rightarrow nB)) \approx mA \vee nB$$

根据定理 3(3) 知,

$$\begin{aligned} \tau_n(((mA \rightarrow nB) \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow (mA \rightarrow nB))) \\ = \tau_n(mA \vee nB) \end{aligned}$$

再结合定义 7 得,  $\xi_n(mA \rightarrow nB, nB) = \tau_n(mA \vee nB)$ 。

(6) 对  $\forall a, b \in G_n$ , 有

$$((ma \rightarrow nb) \rightarrow (ma \wedge nb)) \wedge ((ma \wedge nb) \rightarrow (ma \rightarrow nb)) = ma$$

从而有  $((mA \rightarrow nB) \rightarrow (mA \wedge nB)) \wedge ((mA \wedge nB) \rightarrow (mA \rightarrow nB)) \approx mA$ 。

根据定理 3(3) 知,  $\tau_n(((mA \rightarrow nB) \rightarrow (mA \wedge nB)) \wedge ((mA \wedge nB) \rightarrow (mA \rightarrow nB))) = \tau_n(mA)$ 。

再结合定义 7 得,  $\xi_n(mA \rightarrow nB, mA \wedge nB) = \tau_n(mA)$ 。

定理 12 设  $A, B \in F(S)$ , 则

$$\xi_n(mA, nB) = \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow mA) - 1$$

证明: 设  $A, B$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , 根据定义 7 及定理 4 有

$$\begin{aligned} \xi_n(mA, nB) &= \tau_n((mA \rightarrow nB) \wedge (nB \rightarrow mA)) \\ &= \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow mA) \end{aligned}$$

又由于  $\tau_n((mA \rightarrow nB) \vee (nB \rightarrow mA)) = 1$ , 因此有

$$\xi_n(mA, nB) = \tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow mA) - 1$$

定理 13 设  $A, B, C \in F(S)$ , 则

$$\xi_n(mA, lC) \geq \xi_n(mA, nB) + \xi_n(nB, lC) - 1$$

证明: 设  $A, B, C$  中含有相同的原子公式  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ,

根据定理 7(2) 和定理 12 得,

$$\begin{aligned} \xi_n(mA, nB) + \xi_n(nB, lC) - 1 &= [\tau_n(mA \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow mA) - 1] + [\tau_n(lC \rightarrow nB) + \tau_n(nB \rightarrow lC) - 1] - 1 \\ &\leq \tau_n(mA \rightarrow lC) + \tau_n(lC \rightarrow mA) - 1 \\ &= \xi_n(mA, lC) \end{aligned}$$

定义 8 设  $A, B \in F(S)$  规定  $\rho_n: F(S) \times F(S) \rightarrow [0, 1]$ ,

令

$$\rho_n(mA, nB) = 1 - \xi_n(mA, nB)$$

则称  $\rho_n$  是  $F(S)$  上的  $t$  伪距离,  $(F(S), \rho_n)$  称为  $t$  逻辑度量空间。

定理 14 设  $A, B \in F(S)$ , 则

- (1) 若  $A \approx B$ , 则  $\rho_n(tA, tB) = 0$ 。
- (2)  $\rho_n(mA, nB) = \rho_n(nB, mA)$ 。
- (3)  $\rho_n(mA \vee nB, mA) = 1 - \tau_n(nB \rightarrow mA)$ 。
- (4)  $\rho_n(mA \wedge nB, mA) = 1 - \tau_n(mA \rightarrow nB)$ 。
- (5)  $\rho_n(mA \rightarrow nB, nB) = 1 - \tau_n(mA \vee nB)$ 。
- (6)  $\rho_n(mA \rightarrow nB, mA \wedge nB) = 1 - \tau_n(mA)$ 。

证明: (1)–(6) 的证明可由定理 11 及定义 8 得到。

定理 15 设  $A, B \in F(S)$ , 则

$$\rho_n(mA, nB) = 2 - \tau_n(mA \rightarrow nB) - \tau_n(nB \rightarrow mA)$$

证明: 它的证明可由定理 12 及定义 8 得到。

定理 16 设  $A, B, C \in F(S)$ , 则

$$\rho_n(mA, lC) \leq \rho_n(mA, nB) + \rho_n(nB, lC)$$

证明: 它的证明可由定理 13 及定义 8 得到。

## 5 $(F(S), \rho_n)$ 中的近似推理

定义 9 设  $A \in F(S), \Gamma \subset F(S), \epsilon > 0$ 。

(1) 如果  $\rho_n(mA, D(\Gamma)) = \inf\{\rho_n(mA, nB) \mid nB \in D(\Gamma)\} < \epsilon$ , 则称  $A$  为  $\Gamma$  的 I-型误差小于  $\epsilon$  的结论, 记为  $A \in D_\epsilon^1(\Gamma)$ ;

(2) 如果  $1 - \sup\{\tau_n(nB \rightarrow mA) \mid nB \in D(\Gamma)\} < \epsilon$ , 则称  $A$  为  $\Gamma$  的 II-型误差小于  $\epsilon$  的结论, 记为  $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$ ;

(3) 如果  $\inf\{H(D(\Gamma), D(\Sigma)) \mid \Sigma \subset F(S), \Sigma \vdash mA\} < \epsilon$ , 则称  $A$  为  $\Gamma$  的 III-型误差小于  $\epsilon$  的结论, 记为  $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$ , 这里  $H$  是 Hausdorff 距离。

下面介绍这 3 种近似推理模式之间的等价性。

定理 17 设  $A \in F(S), \Gamma \subset F(S), \epsilon > 0$ , 若  $A \in D_\epsilon^1(\Gamma)$ , 则  $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$ 。

证明: 若  $A \in D_\epsilon^1(\Gamma)$ , 由定义 9(1) 知  $\exists nB_0 \in D(\Gamma)$ , 使得  $\rho_n(mA, nB_0) < \epsilon$ , 则

$$\begin{aligned} \rho_n(mA, nB_0) &= 1 - \tau_n((mA \rightarrow nB_0) \wedge (nB_0 \rightarrow mA)) \\ &\geq 1 - \tau_n(nB_0 \rightarrow mA) \end{aligned}$$

所以有  $1 - \sup\{\tau_n(nB \rightarrow mA) \mid nB \in D(\Gamma)\} \leq 1 - \tau_n(nB_0 \rightarrow mA) < \epsilon$ , 从而  $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$ 。

定理 18 设  $A \in F(S), \Gamma \subset F(S), \epsilon > 0$ , 若  $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$ , 则  $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$ 。

证明: 若  $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$ , 则  $\exists nB_0 \in D(\Gamma)$ , 使得  $1 - \tau_n(nB_0 \rightarrow mA) < \epsilon$ , 由  $\vdash nB_0 \rightarrow (nB_0 \vee mA)$  及 MP 规则知  $(nB_0 \vee mA) \in$

$D(\Gamma)$ ,再由定理 14(3)得

$$\begin{aligned}\rho_n(mA, D(\Gamma)) &\leq \rho_n(mA, nB_0 \vee mA) \\ &= 1 - \tau_n(nB_0 \rightarrow mA) < \epsilon\end{aligned}\quad (1)$$

令  $\Sigma_0 = \Gamma \cup \{mA\}$ , 则  $\Sigma_0 \subset F(S)$ ,  $\Sigma_0 \vdash mA$ ,  $D(\Gamma) \subset D(\Sigma_0)$ , 下面将分两个方面来证明  $H(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) < \epsilon$ 。

一方面, 对  $\forall nB \in D(\Gamma)$  都有  $\rho_n(nB, D(\Sigma_0)) = 0$ , 所以有  $H_0(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) = \sup\{\rho_n(nB, D(\Sigma_0)) \mid nB \in D(\Gamma)\} = 0 < \epsilon$

另一方面, 对  $\forall mA_0 \in D(\Sigma_0)$ ,  $nB \in D(\Gamma)$ ,  $\exists \{nB_1, nB_2, \dots, nB_s\} \subset \Gamma$ ,  $\{nB_1, nB_2, \dots, nB_t\} \subset \Gamma$ , 使得  $\{nB_1, nB_2, \dots, nB_s\} \vdash nB$ ,  $\{nB_1, nB_2, \dots, nB_t, mA\} \vdash mA_0$ , 所以  $\vdash nB_1 \wedge nB_2 \wedge \dots \wedge nB_s \rightarrow nB$ ,  $\vdash nB_1 \wedge nB_2 \wedge \dots \wedge nB_t \wedge mA \rightarrow mA_0$ 。

令  $nB^* = nB_1 \wedge \dots \wedge nB_s \wedge nB_1 \wedge \dots \wedge nB_t \wedge mA$ ,  $nB_0 = nB^* \vee mA_0$ , 则  $\vdash nB^* \rightarrow nB$ ,  $\vdash nB^* \rightarrow mA_0$ , 于是  $\vdash nB^* \rightarrow nB^* \wedge mA_0$ ,  $\vdash nB^* \wedge mA \rightarrow nB^* \wedge mA_0$ ,  $nB_0 \in D(\Gamma)$ , 因此

$$\begin{aligned}\rho_n(mA_0, nB_0) &= \rho_n(mA_0, nB^* \vee mA_0) \\ &= 1 - \tau_n(nB^* \rightarrow mA_0) \\ &= 1 - \tau_n(nB^* \rightarrow nB^* \wedge mA_0) \\ &\leq 1 - \tau_n(nB^* \rightarrow nB^* \wedge mA) \\ &= 1 - \tau_n(nB^* \rightarrow mA) \\ &\leq 1 - \tau_n(nB \rightarrow mA) \\ &\leq 1 - \tau_n((nB \rightarrow mA) \wedge (mA \rightarrow nB)) \\ &= \rho_n(mA, nB)\end{aligned}$$

所以  $\rho_n(mA_0, D(\Gamma)) \leq \rho_n(mA, D(\Gamma))$ , 由式(1)得

$$\begin{aligned}H_0(D(\Sigma_0), D(\Gamma)) &= \sup\{\rho_n(mA_0, D(\Gamma)) \mid mA_0 \in D(\Sigma_0)\} \\ &\leq \rho_n(mA, D(\Gamma)) < \epsilon\end{aligned}\quad (3)$$

再由式(2)、式(3)可得  $H(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) < \epsilon$ 。

所以有  $\inf\{H(D(\Gamma), D(\Sigma)) \mid \Sigma \subset F(S), \Sigma \vdash mA\} \leq H(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) < \epsilon$ 。

因此有  $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$ 。

定理 19 设  $A \in F(S)$ ,  $\Gamma \subset F(S)$ ,  $\epsilon > 0$ , 若  $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$ , 则  $A \in D_\epsilon^1(\Gamma)$ 。

证明: 若  $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$ , 由定义 9(3)知  $\exists \Sigma_0 \subset F(S)$ , 使得  $H(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) < \epsilon$  且  $\Sigma_0 \vdash mA$ , 所以  $\inf\{\rho_n(mA, nB) \mid nB \in D(\Gamma)\} = \rho_n(mA, D(\Gamma)) \leq H(D(\Gamma), D(\Sigma_0)) < \epsilon$ 。

因此  $A \in D_\epsilon^1(\Gamma)$ 。

结束语 本文通过增加新的连接词  $\sim, \Delta$  对 Gödel  $n$  值命题逻辑系统进行公理化扩张  $\text{Gödel}_{\sim, \Delta}(G_{\sim, \Delta})$ , 得到了命题公式的  $t$  真度、命题公式间的  $t$  相似度和  $t$  伪距离的概念, 增加了  $\sim$  和  $\Delta$  连接词和它们的一些相关性质, 最后在  $t$  逻辑度量空间中提出了 3 种不同的近似推理模式, 并证明了 3 种近似推理模式间的等价性。

## 参 考 文 献

[1] Pavelka J. On Fuzzy Logic I: Many-valued rules of inference[J].

Mathematical Logic Quarterly, 1979, 25(3-6): 45-52

- [2] Pavelka J. On Fuzzy Logic II: Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculi[J]. Mathematical Logic Quarterly, 1979, 25(7-12): 119-134
- [3] Pavelka B J. On fuzzy logic III: Semantical completeness of some many-valued propositional calculi, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d[C]// Math. 2010
- [4] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报, 2006, 23(2): 191-215
- [5] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006
- [6] 裴道武. 基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013
- [7] 周红军. Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 Borel 概率真度理论和极限定理[J]. 软件学报, 2012, 23(9): 2235-2247
- [8] 折延宏, 贺晓丽. 粗糙逻辑中公式的 Borel 型概率粗糙真度[J]. 软件学报, 2014, 25(5): 970-983
- [9] 李骏, 王国俊. Gödel  $n$  值命题逻辑系统中的  $\alpha$ -真度理论[J]. 软件学报, 2007, 18(1): 33-39
- [10] 吴洪博. Łukasiewicz 命题逻辑中公式的  $\Gamma$ -真度理论和极限定理[J]. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1542-1559
- [11] 袁彦莉, 张兴芳, 李成允.  $n$  值 Gödel 逻辑系统中的随机化研究[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(12): 41-45
- [12] 惠小静, 王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学: E 辑, 2007, 37(6): 801-812
- [13] 惠小静, 王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用(II)[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(3): 21-26
- [14] 惠小静. 三值  $R_0$  命题逻辑系统的随机化[J]. 应用数学学报, 2009, 32(1): 19-27
- [15] 王国俊, 惠小静. 概率逻辑学基本定理的推广[J]. 电子学报, 2007, 35(7): 1333-1340
- [16] 崔美华.  $n$  值. Łukasiewicz 命题逻辑系统中公式的随机真度及近似推理[J]. 应用数学学报, 2012, 35(2): 209-220
- [17] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法[J]. 中国科学, E 辑, 2002, 32(2): 58-66
- [18] 彭家寅, 侯健, 李洪兴. 基于某些常见蕴涵算子的反向三 I 算法[J]. 自然科学进展, 2005, 15(4): 404-410
- [19] Esteve F, Godo L, Hájek P, et al. Residuated fuzzy logics with an involutive negation[J]. Arch Math Logic, 2000, 39: 103-124
- [20] Flaminio T, Marchioni E.  $T$ -norm based logics with an independent an involutive negation[J]. Fuzzy Set Syst, 2006, 157: 3125-3144
- [21] Baaz M. Infinite-valued Gödel logic with 0-1 projections and relativisations[J]. Comput Sci Phys Lect Notes Logic, 1996, 6: 23-33
- [22] Cintula P, Klement E P, Mesiar R, et al. Fuzzy logics with an additional involutive negation[J]. Fuzzy Set Syst, 2010, 161: 390-411
- [23] Cintula P. Weakly implicative (fuzzy) logics I: basic properties[J]. Arch Math Logic, 2006, 45: 673-704
- [24] 惠小静. 基于真值的  $SBL_{\sim}$  公理化扩张系统的计量化[J]. 中国科学: 信息科学, 2014, 44(7): 900-911