模糊 BCK-代数及其模糊左(右)简理想

彭家寅

(内江师范学院数学与信息科学学院 内江 641199)

摘 要 将 Dib 的模糊空间和模糊二元运算的概念引入 BCK-代数中,给出了研究模糊 BCK-代数的一个新方法。提出了模糊子代数、模糊左(右)简理想和模糊同态的概念,初步建立了新的模糊 BCK-代数理论。结果表明,经典的 BCK-代数之模糊子代数、模糊左右简理想都是新理论的特例,因而这种新方法提供了发展模糊 BCK-代数理论的一个有力工具。

关键词 模糊空间,模糊二元运算,模糊 BCK-代数,模糊左(右)简理想,模糊同态

中图法分类号 O159 **文献标识码** A

Fuzzy BCK-algebras and its Fuzzy Left (Right) Reduced Ideals

PENG Jia-yin

(School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang 641199, China)

Abstract Introducing the concepts of fuzzy spaces and fuzzy binary operations proposed by Dib into BCK-algebra, a new aroappch to study fuzzy BCK-algebra was given. The concepts of fuzzy subalgebras, fuzzy left (right) reduced ideals and fuzzy homomorphisms of fuzzy BCK-algebras were put forward. A new theory of fuzzy BCK algebra was preliminarily established. The results show that the classical fuzzy sub-algebra and fuzzy left (right) reduced ideal of BCK-algebra are the special cases of the new theory, so the new method provides a powerful tool to develop the theory of fuzzy BCK-algebras.

Keywords Fuzzy space, Fuzzy binary operation, Fuzzy BCK-algebra, Fuzzy left (right) reduced ideal, Fuzzy homomorphism

1 引言

自 Zadeh[1] 提出模糊集概念后,Rosenfeld[2] 率先将模糊集理论用于模糊代数结构的研究中,提出了模糊子群的概念。Negoita 和 Ralescu[3] 将 Rosenfeld 关于模糊子群的定义从区间[0,1]推广到一般格结构上,而 Anthony 和 Sherwood[4] 利用三角模重新定义了模糊子群。Kuroki[5,6] 提出了半群中的模糊理想与模糊双理想的概念,Nanda[7] 研究了模糊域与模糊线性空间,Liu[8] 引入了模糊子环及理想的概念,Xi[9] 研究了模糊 BCK-代数,路玲霞[10] 讨论了 Heyting 代数中的模糊滤子。沿着 Rosenfeld 方法,研究者们[11-14] 在具有某种普通代数结构的经典集合上引入满足适当条件的模糊子集,来探究模糊代数结构。

我们知道,论域集的概念在经典数学中扮演着本质性角色,即经典数学中的任何代数结构都是具有一个或多个二元运算的论域集,例如度量空间是具有距离的一个论域集,拓扑空间是带有集合运算的论域集。然而,在基于 Rosenfeld 方法的任何模糊代数结构(称为经典模糊代数结构)的讨论中,由于没有模糊论域这个概念,任何模糊代数结构的本质定义之系统性是不明确的。1994 年,Dib[15] 引入了模糊空间的概念,替代了普通情形下论域集的概念,进而研究了模糊子空间、模糊空间上的二元运算、模糊群及模糊子群。随后,Dib 等[16] 提出模糊半群及模糊子半群的概念,讨论了模糊半群上的模糊理想及模糊双理想等问题。

基于 Dib 的思想方法[15],本文引入模糊 BCK-代数和模糊 BCK-代数的模糊子代数的概念,研究模糊 BCK-代数中的模糊(左、右)简理想,探究相应于 Dib 方法与 Rosenfeld 方法下的两种模糊子代数、模糊(左、右)简理想之间的关系。

2 预备

本节简要回顾文献[15]中的定义、符号及一些结果。符号 I 表示具有通常实数序的单位区间[0,1]。符号 $L,K,N,\cdots$ 表示具有最小元和有最大元的任意格。符号 $L\Diamond K$ 表示具有如下偏序关系的向量格 $L\times K$:1) $(r_1,r_2)\leqslant(s_1,s_2)$ 当且仅当 $r_1\leqslant r_2, s_1\leqslant s_2$ 且 $s_1\neq 0, s_2\neq 0$;2) $(s_1,s_2)=(0,0)$ 当且仅当 $s_1=0$ 或 $s_2=0$。J 表示向量格 $I\Diamond I$。

本文所谓 L-模糊子集是指其隶属函数取值于格 L。X 的模糊子集 A 表示为 $\{(x,A(x)):x\in X\}$。其中,$A(x)$ 表示元素 x 的隶属度,并简记为 $\{(x,A(x))\}$。以 $x\in X$ 为支点,隶属值为 $s(s\neq 0)$ 的 X 之单点模糊集记为 $[x,s]$。符号 $(x,r)\in A$,$A\in L^X$,意味着 $A(x)=r$。

定义 1 模糊空间 X_L 是 $x\in X$ 的所有有序对 (x,L) 的集合,即 $X_L=\{(x,L)\mid x\in X\}$,并称 (x,L) 为模糊空间 X_L 的一个模糊元素。

彭家寅(1962-),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能,E-mail:pengjiayin62226@163.com。

定义 2 格 L 的一个子集 K 称做 L 的 M-子格，如果下列条件成立：

(1) K 至少包含 L 的一个除零外的元素；

(2) K 关于 L 的运算“$\vee$”和运算“$\wedge$”是封闭的。

定义 3 模糊空间 X_L 的模糊子空间 U 是有序对 (y,L_y) 的集合，其中 $y\in U_0$，U_0 为 X 的给定子集，L_y 为 L 的一个 M-子格，记 $U=\{(y,L_y):y\in U_0\}$，并称 (y,L_y) 为模糊子空间 U 的一个模糊元。

X 的模糊子集 A 可以视为模糊子空间 $U=\{(y,L_y):y\in U_0\}$ 的一个子集当且仅当若 $y\in U_0$ 有 $A(x)\in L_y$，若 $y\notin U_0$ 有 $A(x)=0$。当然，X 的任一模糊子集 A 都可定义 $X_I(I=[0,1])$ 的如下 3 个模糊子空间：

$\underline{H}(A)=\{(x,[0,A(x)]\mid x\in A_0\}$

$\overline{H}(A)=\{(x,\{0\}\cup[A(x),1])\mid x\in A_0\}$

$H_0(A)=\{(x,\{0,A(x)\})\mid x\in A_0\}$

其中，$A_0=\{x\in A\mid A(x)\neq 0\}$ 为 A 支撑集，并称它们为由 A 诱导的模糊子空间。

定义 4 两个模糊空间 X_L 和 Y_K 的模糊笛卡尔积是模糊空间。

$$\begin{aligned}X_L\,\overline{\underline{\times}}\,Y_K&=(x\times Y,L\Diamond K)\\&=\{((x,y),L\Diamond K)\mid(x,y)\in L\times K\}\end{aligned}$$

设模糊空间 X_L 的模糊子空间为 $U=\{(x,L_x):x\in U_0\}$ 和模糊空间 Y_K 的模糊子空间为 $V=\{(y,K_y)\mid y\in V_0\}$，$U$ 与 V 的模糊笛卡尔积是模糊空间 $X_L\,\overline{\underline{\times}}\,Y_K$ 的模糊子空间。

$$U\,\overline{\underline{\times}}\,V=\{((x,y),L_x\Diamond K_y)\}\mid(x,y)\in U_0\times V_0\}$$

X 的模糊子集 $A=\{(x,r)\}$ 和 Y 的模糊子集 $B=\{(y,s)\}$ 的模糊笛卡尔积是 $X\times Y$ 的一个模糊子集：

$$A\,\underline{\times}\,B=\{((x,y),(A(x),B(y)))\mid x\in X,y\in Y\}$$

定义 5 设 X_L，Y_K 和 Z_N 是给定的非空模糊空间。从 $X\times Y$ 的所有 $L\Diamond K$-模糊子集的集合到 Z 的所有 N-模糊子集的集合上的模糊函数 $\underline{F}$，记为 $\underline{F}=(F,f_{xy}):X\times Y\to Z$，其中 $F:X\times Y\to Z$ 是一个函数，$\{f_{xy}\}_{(x,y)\in X\times Y}$ 是隶属函数 $f_{xy}:L\Diamond K\to N$ 构成的一个族且满足：

(1) f_{xy} 在 $L\Diamond K$ 是不减的；

(2) $f_{xy}(0_L,0_K)=0_N$ 且 $f_{xy}(1_L,1_K)=1_N$（这里 $0_L,1_L,0_K,1_K$ 和 $0_N,1_N$ 分别是 L,K 和 N 的最小与最大元）使得 $X\times Y$ 的任意 $L\Diamond K$-模糊子集 C 在 $\underline{F}$ 下的象为 Z 的 N-模糊子集 $\underline{F}(C)$：对任意 $z\in Z$，有

$$\underline{F}(C)(z)=\begin{cases}\bigvee\limits_{(x,y)\in F^{-1}(z)}f_{xy}(C(x,y)), & F^{-1}(z)\neq\varnothing\\ 0_N, & F^{-1}(z)=\varnothing\end{cases}$$

设 A 和 B 为 X 的模糊子集，模糊函数 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 在 $A\,\underline{\times}\,B$ 上作用定义为：对任意 $z\in X$，

$$\begin{aligned}(A\underline{F}B)(z)&:=\underline{F}(A\,\underline{\times}\,B(z)\\&=\begin{cases}\bigvee\limits_{(x,y)\in F^{-1}(z)}f_{xy}(A(x),B(y)), & F^{-1}(z)\neq\varnothing\\ 0, & F^{-1}(z)=\varnothing\end{cases}\end{aligned}$$

记 $F(x,y)=xFy$ 且 $f_{xy}(r,s)=rf_{xy}s$，则 $[x,r]\underline{F}[y,s]=[xFy,rf_{xy}s]$，从而

$$A\,\underline{\times}\,B=\bigvee_{x,y\in X}([x,A(x)])\,\underline{\times}\,[y,B(y)])$$

于是

$$\begin{aligned}A\underline{F}B&=\bigvee_{x,y\in X}([x,A(x)]\underline{F}[y,B(y)])\\&=\bigvee_{x,y\in X}[xFy,A(x)f_{xy}B(y)]\end{aligned}$$

定义 6 模糊空间 X_L 上的模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 是从 $X\times X$ 到 X 上的一个模糊函数，使得隶属函数 $f_{xy}:L\Diamond L\to L$ 满足：

(1) $f_{xy}(r,s)=0$ 当且仅当 $r=0$ 或 $s=0$；

(2) 对任意 $(x,y)\in X\times X$，函数 f_{xy} 都是满射，即对任意 $(x,y)\in X\times X$，$f_{xy}(L\Diamond L)=L$。

如果隶属函数 f_{xy} 是恒同的，即对任意 $(x,y)\in X\times X$，$f_{xy}=f$，则称模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 是一致的。

3 模糊 BCK-代数及其模糊子代数

现考虑模糊空间 X_I，其中 $I=[0,1]$ 关于实数的通常序构成一个格。对于 X_I 的任意模糊元 (x,I) 和 (y,I)，$(x,I)\,\overline{\underline{\times}}\,(y,I)=((x,y),I\Diamond I)$ 为 $(X\times X,I\Diamond I)$ 的一个模糊元。X_I 上的模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 在该模糊元上的作用为：

$$\begin{aligned}(x,I)\underline{F}(y,I)&=:\underline{F}((x,I)\,\overline{\underline{\times}}\,(y,I))\\&=\underline{F}((x,y),I\Diamond I)\\&=(F(x,y),f_{xy}(I\Diamond I))\\&=(xFy,I)\end{aligned}$$

定义 7 称 $(2,0)$ 型代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 为模糊 BCK-代数，其中 $(0,I)$ 为模糊空间 X_I 的常元，且 X_I 上的模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 满足：对任意 $(x,I),(y,I),(z,I)\in X_I$，有

(1) $(((x,I)\underline{F}(y,I))\underline{F}((x,I)\underline{F}(z,I)))\underline{F}((z,1)\underline{F}(y,I))=(0,I)$

(2) $((x,I)\underline{F}((x,I)\underline{F}(y,I)))\underline{F}(y,I)=(0,I)$

(3) $(x,I)\underline{F}(x,I)=(0,I)$

(4) $(0,1)\underline{F}(x,I)=(0,I)$

(5) $(x,I)\underline{F}(y,I)=(y,I)\underline{F}(x,I)=(0,I)$
$\Rightarrow(x,I)=(y,I)$。

若模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 是一致的，则称 $(X_I,\underline{F},(0,1))$ 为一致模糊 BCK-代数。

容易验证下列结论成立。

定理 1 对于模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,1))$，存在一个普通 BCK-代数 (X,F) 与模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 同构，其对应关系为 $(x,I)\leftrightarrow x$。

注：在分明情况下，I 便是 $\{0,1\}$，模糊笛卡尔积空间 $(X\times X,I\Diamond I)$ 与普通笛卡尔积空间 $X\times X$ 是一致的，模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 变为普通二元运算 F。

设 $(X_I,\underline{F},(0,1))$ 为给定的模糊 BCK-代数，$U=\{(x,I_x)\mid x\in U_0\}$ 是模糊空间 X_I 的模糊子空间。X_I 上的模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 对模糊子空间 U 的模糊元作用如下：对任意 $x,y\in U_0$，有

$$\begin{aligned}(x,I_x)\underline{F}(y,I_y)&=\underline{F}((x,I_x)\,\overline{\underline{\times}}\,(y,I_y))\\&=(xFy,f_{xy}(I_x\Diamond I_y))\end{aligned}$$

定义 8 称有序对 $(U,\underline{F})$ 为模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F}(0,I))$ 的模糊子代数，如果模糊空间 X_I 的非空模糊子空间 $U=\{(x,I_x)\mid x\in U_0\}$ 在模糊二元运算 $\underline{F}=(F,f_{xy})$ 下是封闭的。

注：由定义 7 知，如果 $(U,\underline{F})$ 为模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F}(0,I))$ 的模糊子代数，则可以说 $(U,\underline{F})$ 为普通 BCK-代数 (X,F) 的模糊子代数。

由上述讨论容易得到以下结论。

定理 2 带有模糊二元运算$\underline{F}=(F,f_{xy})$的模糊子空间$U=\{(x,I_x)|x\in U_0\}$为模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数的充分必要条件是：对任意 $x,y\in U_0$，有

(1)$xFy\in U_0$；

(2)$f_{xy}(I_x\Diamond I_y)=I_{xFy}$。

条件(1)意味着 $F(U_0\times U_0)\subseteq U_0$，即 F 在 $U_0\times U_0$ 上的限制也是 U_0 的一个二元运算。因为 $f_{xy}(I_x\Diamond I_y)=I_xf_{xy}I_y=f_{xy}(I_x,I_y)$，则定理 2 可表示为定理 3。

定理 3 模糊子空间 $U=\{(x,I_x)|x\in U_0\}$ 关于模糊二元运算$\underline{F}=(F,f_{xy})$成为模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数的充分必要条件是：

(1)(U_0,F)是普通 BCK-代数的一个普通子代数；

(2)$I_xf_{xy}I_y=I_{xFy}$ 对所有 $x,y\in U_0$ 都成立。

推论 1 设 U 为模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的任一模糊子代数，则$(0,I_0)\in U$。

证明：因为 U 非空，则存在 $x\in U_0$ 使得$(x,I_x)\in U$。从而$(0,I_0)=(xFx,I_{xFx})=(x,I_x)\underline{F}(x,I_x)\in U$。

若记 $U'=\{I_x|x\in U_0\}$，并称之为隶属函数空间。显然，定理 3 (2)定义了隶属函数空间 U'上的一个二元运算$\otimes$：$I_x\otimes I_y=I_xf_{xy}I_y$。考虑映射：$x\leftrightarrow I_x,x\in U_0$，并称之为模糊子空间 $U=\{(x,I_x):x\in U_0\}$的内映射，该映射满足：对任意 $x,y\in U_0$，都有 $xFy\leftrightarrow I_x\otimes I_y$，于是可得如下结论。

定理 4 如果$(U,\underline{F})$为模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数，则模糊子空间 U 的内映射是 BCK-代数(U,F)与$(U',\otimes)$之间的同态映射。

定理 5 设$(U,\underline{F})$为模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数。如果 A 和 B 都是 U 的模糊子集，则 $A\underline{F}B\in U$。

证明：因 A 和 B 都是 U 的模糊子集，所以 $A(x)\in I_x$ 且 $B(y)\in I_y$ 对任意 $x,y\in U_0$ 成立。于是对任意 $z\in U_0$ 有：

$$\begin{aligned}(A\underline{F}B)(z)&=\underline{F}(A\,\underline{\times}\,B)(z)\\&=\bigvee_{(x,y)\in F^{-1}(z)}f_{xy}(A(x),B(y))\\&=\bigvee_{(x,y)\in F^{-1}(z)}A(x)f_{xy}B(y)\\&\in I_xf_{xy}I_y=I_z\end{aligned}$$

设 A 是 X 的模糊子集，$\overline{H}(A)$，$\underline{H}(A)$和 $H_0(A)$都是由 A 诱导的模糊子空间。对于这些模糊子空间，定理 2 和定理 5 可写成如下定理。

定理 6 $(\overline{H}(A),\underline{F})$，$(\underline{H}(A),\underline{F})$和$(H_0(A),\underline{F})$是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数的充分必要条件是：对任意 $x,y\in A_0=\{w\in X|A(w)\neq 0\}$，有

(1)$xFy\in A_0$；

(2)$f_{xy}(A(x),A(y))=A(xFy)$。

我们说 X 的模糊子集 A 能诱导模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数，如果$(\overline{H}(A),\underline{F})$，$(\underline{H}(A),\underline{F})$和$(H_0(A),\underline{F})$都是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数。

设$(X_I,\underline{F},(0,I))$为一致模糊 BCK-代数，即$\underline{F}=(F,f)$。以下考虑隶属函数 f 是一个 t-模函数，揭示模糊子代数与经典模糊子代数之间的关系。

定理 7 (1)设$(X_I,\underline{F},(0,I))$为一致模糊 BCK-代数，且隶属函数 f 为 t-模函数。对于 X 的任意模糊子集 A，若 A 能诱导$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数，那么 A 是(X,F)的经典模糊子代数。

(2)如果(Y,F)为普通 BCK-代数(X,F)的普通子代数，则对满足条件 $A_0=Y$ 的 X 之任意模糊子集 A，存在一个模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{G},(0,I))$，使得 A 能诱导出$(X_I,\underline{G},(0,I))$的模糊子代数。

证明：(1)对任意 $x,y\in X$，若 $A(x)=0$ 或 $A(y)=0$，则由定义 6 知：$f(A(x),B(y))=0$。

若 $A(x)\neq 0$ 且 $A(y)\neq 0$，则 $x,y\in A_0$。因为模糊子集 A 能诱导出$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数，则 $f(A(x),B(y))=A(xFy)$。于是，对任意 $x,y\in X$，总有 $f(A(x),B(y)\leqslant A(xFy)$。这表明 A 是(X,F)的经典模糊子代数。

(2)设 A 为 X 之任意模糊子集，且 $A_0=Y$。令 $f(r,s)$为一个给定的 t-模。现构造$(X_I,\underline{G},(0,I))$如下：令$\underline{G}=(F,g_{xy})$，其中 $g_{xy}(r,s)=\phi_{xy}(f(r,s))$且 ϕ_{xy} 的定义如下。

若 $f(A(x),B(y))\neq 0$，则对任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\phi_{xy}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{A(xFy)}{f(A(x),A(y))}\lambda, & \lambda\leqslant f(A(x),A(y))\\ 1+\dfrac{1-A(xFy)}{1-f(A(x),A(y))}(\lambda-1), & \lambda>f(A(x),A(y))\end{cases}$$

若 $f(A(x),B(y))=0$，则对任意 $\lambda\in[0,1]$，$\phi_{xy}(\lambda)=\lambda$。

显然，对于任意 $x,y\in X$，$g_{xy}(r,s)$都是连续满射，并且 $g_{xy}(r,s)=0$ 当且仅当 $r=0$ 或 $s=0$，所以$\underline{G}=(F,g_{xy})$为 X_I 上的一个二元运算。可以验证$(X_I,\underline{G},(0,I))$为模 BCK-代数。因 $f(r,s)$为 t-模，所以当 $A(x)\neq 0$ 且 $A(y)\neq 0$，必有 $f(A(x),B(y))\neq 0$。再按 $g_{xy}(r,s)$的定义知：

$$g_{xy}(A(x),A(y))=\phi_{xy}(f(A(x),A(y)))=A(xFy)$$

注意到$(Y,F)=(A_0,F)$为普通子代数，利用定理 6 可知，A 可诱导出$(X_I,\underline{G},(0,I))$的模糊子代数。

推论 2 BCK-代数(X,F)的每个经典模糊子代数 A 都可诱导出关于某些模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{G},(0,I))$的模糊子代数。

例 1 设 $X=\{0,a,b,c\}$，下面给出 X 上的二元运算和一些隶属函数 $f_{xy},x,y\in X$，即定义模糊空间 X_I 上的模糊二元运算$\underline{F}=(F,f_{xy})$，并找出一些模糊子代数。

X 中的二元运算定义如表 1 所列。

表 1

F	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	0	0	0

容易验证，(X,F)为一个 BCK-代数。对所有 $x,y\in X$，取 $f_{xy}(r,s)=r\wedge s$，从而$(X_I,\underline{F},(0,I))$为模糊 BCK-代数，并且 X 的模糊子集 A 能诱导出模糊子代数的充分必要条件是：对所有 $A(x)\neq 0,A(y)\neq 0$ 都有 $A(x)\wedge A(y)=A(xFy)$。这样的模糊子集仅有如下 7 种形式。

(1)$A=\dfrac{\alpha}{0}+\dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{0}{b}+\dfrac{0}{c},\alpha\neq 0$

(2)$A=\dfrac{\alpha}{0}+\dfrac{0}{a}+\dfrac{\alpha}{b}+\dfrac{0}{c},\alpha\neq 0$

(3)$A=\dfrac{\alpha}{0}+\dfrac{0}{a}+\dfrac{0}{b}+\dfrac{\alpha}{c},\alpha\neq 0$

(4)$A=\dfrac{\alpha}{0}+\dfrac{\alpha}{a}+\dfrac{\alpha}{b}+\dfrac{0}{c},\alpha\neq 0$

(5)$A=\frac{\alpha}{0}+\frac{\alpha}{a}+\frac{0}{b}+\frac{\alpha}{c},\alpha\neq 0$

(6)$A=\frac{\alpha}{0}+\frac{0}{a}+\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{c},\alpha\neq 0$

(7)$A=\frac{\alpha}{0}+\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{c},\alpha\neq 0$

又模糊集 $B=\frac{\beta_1}{0}+\frac{\beta_2}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}(\beta_1>\beta_2)$。

关于 t-模 $f(r,s)=r\wedge s$ 构成(X,F)的一经典模糊子代数。构造模糊空间 X_I 上的一个模糊二元运算$\underline{G}=(F,g_{xy})$：

$g_{0b}(r,s)=g_{0c}(r,s)=g_{b0}(r,s)=g_{c0}(r,s)=g_{a0}(r,s)=g_{ab}(r,s)=g_{ac}(r,s)=g_{00}(r,s)=g_{ba}(r,s)=g_{ca}(r,s)=g_{bc}(r,s)=g_{cb}(r,s)=g_{bb}(r,s)=g_{cc}(r,s)=r\wedge s$

并且

$$g_{0a}(r,s)=g_{aa}(r,s)=\begin{cases}\frac{\beta_1}{\beta_2}(r\wedge s), & r\wedge s\leqslant\beta_2\\ \frac{(\beta_1-\beta_2)+(1-\beta_2)(r\wedge s)}{1-\beta_2}, & r\wedge s>\beta_2\end{cases}$$

可验证，$(X_I,\underline{G},(0,I))$为模糊 BCK-代数，且模糊集 B 可诱导出$(X_I,\underline{G},(0,I))$的模糊子代数。

4 模糊左、右简理想

设 $U=\{(x,I_x)\mid x\in U_0\}$是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子空间，其中 $X_I=\{(x,I)\mid x\in X\}$，$\underline{F}=(F,f_{xy})$，$U_0\subseteq X$。现考虑模糊 BCK-代数的一些特殊模糊子空间。

定义 9 模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子空间 U 叫做模糊左(右)简理想，如果对任意$(x,I)\in X_I$ 和$(y,I_y\in U)$，有$(X,I)\underline{F}(y,I_y))\in U((y,I_y)\underline{F}(x,I)\in U)$。

定理 8 U 为模糊 BCK-代数的$(X_I,\underline{F},(0,I))$模糊左(右)简理想当且仅当：

(1)(U_0,F)是普通 BCK-代数(X,F)的普通左(右)简理想；

(2)对任意 $x\in X$ 及 $y\in U_0$，有

$f_{xy}(I\Diamond I_y)=I_{xFy}(f_{yx}(I_y\Diamond I)=I_{yFx})$

证明：仅考虑 U 为模糊左简理想的证明，对于模糊右简理想的证明是类似的。对任意$(x,I)\in X_I$ 和$(y,I_y)\in U$，有$(x,I)\underline{F}(y,I_y)\in U$，这等价于存在$(z,I_z)\in U$ 使得$(xFy,f_{xy}(I\Diamond I_y))=(z,I_Z)\in U$，它等价于

(1)$xFy=z\in U_0,x\in X,y\in U_0$；

(2)$f_{xy}(I\Diamond I_y)=I_Z=I_{xFy}$。

条件(1)表明(U_0,F)为普通 BCK-代数(X,F)的普通左简理想，条件(2)正是定理 8(2)。

注：在经典模糊情况下，任意模糊左(右)约简理想都是模糊子代数。但在现在的情况下，结论不真。

例 2 设(X,F)是普通 BCK-代数。在模糊空间 X_I 上定义一个一致模糊二元运算$\underline{F}=(F,f_{xy})$，其中 f_{xy}=“·”为 I 上的普通乘法。考虑模糊子空间 $U=\{(x,[0,\frac{1}{3}])\mid x\in X\}$如下：由于$(X,F)$是左、右简理想，且对任意 $x,y\in X$，有

$$f_{xy}(I\Diamond I_y)=f_{xy}(I\Diamond[0,\frac{1}{3}])=[0,f_{xy}(1,\frac{1}{3})]=[0,\frac{1}{3}]=I_{xFy}$$

$$f_{yx}(I_y\Diamond I)=f_{yx}([0,\frac{1}{3}]\Diamond I)=[0,f_{yx}(\frac{1}{3},1)]=[0,\frac{1}{3}]=I_{yFx}$$

所以 U 是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊左、右简理想。

另一方面，对任意$(x,[0,\frac{1}{3}])$，$(y,[0,\frac{1}{3}])\in U$，有

$$\begin{aligned}&(x,[0,\frac{1}{3}])\underline{F}(y,[0,\frac{1}{3}])\\&=(xFy,f_{xy}([0,\frac{1}{3}]\Diamond[0,\frac{1}{3}]))\\&=(xFy,[0,f_{xy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})])\\&=(xFy,[0,\frac{1}{9}])\notin U\end{aligned}$$

故$(U,\underline{F})$不是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数。

注：在例 2 中，将隶属函数换成 $f_{xy}(r,s)=r\wedge s$，$\forall x,y\in X$，则模糊 BCK-代数的模糊左(右)简理想也模糊子代数。

定理 9 模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊左(右)简理想 U 为模糊子代数的充分必要条件是：对任意 $x,y\in U_0$，有

$f_{xy}(I\Diamond I_y)=f_{xy}(I_x\Diamond I_y)$

$(f_{yx}(I_y\Diamond I)=f_{xy}(I_y\Diamond I_x))$

证明：因对于模糊右简理想与模糊左简理想的情况类似，故仅考虑模糊左约简理想的情形。假设 U 为模糊 BCK-代数$((X_I,\underline{F},(0,I)))$的模糊左简理想，并且任意 $x,y\in U_0$，有 $f_{xy}(I\Diamond I_y)=f_{xy}(I_x\Diamond I_y)$。由定理 8 可得：

(1)(U_0,F)是普通 BCK-代数(X,F)的普通左约简理想；

(2)对任意 $x\in X$ 及 $y\in U_0$，有 $f_{xy}(I\Diamond I_y)=I_{xFy}$。

显然，由(1)可推知(U_0,F)是普通 BCK-代数(X,F)的普通子代数。依(2)与假定有 $I_{xFy}=f_{xy}(I\Diamond I_y)=f_{xy}(I_x\Diamond I_y)$对任意 $x,y\in U_0$ 都成立。再由定理 2 知，U 是的$(X_I,\underline{F},(0,I))$模糊子代数。

反之，模糊左约简理想 U 也是$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代数，则对任意 $x,y\in U_0$，有 $f_{xy}(I\Diamond I_y)=I_{xFy}=f_{xy}(I_x\Diamond I_y)$。

设$(X_I,\underline{F},(0,I))$是模糊 BCK-代数，且 A 是 X 的模糊子集，$\overline{H}(A)$，$\underline{H}(A)$和 $H_0(A)$都是由 A 诱导的模糊子空间。对于这些模糊子空间，定理 8 和定理 9 可表示如下。

定理 10 $(\overline{H}(A),\underline{F})$，$(\underline{H}(A),\underline{F})$和$(H_0(A),\underline{F})$是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊左(右)简理想的充要条件是：

(1)(A_0,F)是普通 BCK-代数(X,F)的普通左(右)简理想；

(2)对任意 $x\in X$ 及 $y\in A_0$，有

$f_{xy}(1,A(y))=A(xFy)$

$(f_{yx}(A(y),1)=A(yFx))$

定理 11 设$(\overline{H}(A),\underline{F})$，$(\underline{H}(A),\underline{F})$和$(H_0(A),\underline{F})$是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊左(右)简理想。那么$(\overline{H}(A)$、$\underline{F})$，$(\underline{H}(A),\underline{F})$和$(H_0(A),\underline{F})$为$(X_I,\underline{F},(0,I))$的模糊子代的充要条件是：对任意 $x,y\in A_0$，有

$f_{xy}(1,A(y))=f_{xy}(A(x),A(y))$

$(f_{yx}(A(y),1)=f_{yx}(A(y),A(x)))$

下面讨论模糊左(右)约简理想与经典模糊左(右)简理想的关系。为此，考虑一致模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0,I))$，这里 $\underline{F}=(F,f)$满足(X,F)为 BCK-代数，$f=\wedge$为从向量格 $J=I\Diamond I$ 到 I 上的取小函数。

定理 12 对于 X 的任一模糊子集 A，如果能诱导一致模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊左(右)简理想 $(\underline{H}(A),\underline{F})$ $((\overline{H}(A),\underline{F})$ 或 $(H_0(A),\underline{F}))$，则 A 是普通 BCK-代数 (X,F) 的一个经典模糊左(右)简理想。

证明：假设 A 是 X 的模糊子集，使得 $(\underline{H}(A),\underline{F})$ 为由 A 诱导的 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊左简理想，其中 $\underline{F}=(F,\wedge)$。由定理 10(2)知，对任意 $x\in X$ 及 $y\in A_0$，有 $A(xFy)=f_{xy}(1,A(y))=1\wedge A(y)=A(y)$。

又对所有 $y\in X-A_0$，$A(y)=0$，故 $A(xFy)\geqslant A(y)$ 对所有 $x,y\in X$ 都成立。这表明 A 是 BCK-代数 (X,F) 的一个经典模糊左简理想。

注：定理 12 之逆在一般情况下不真，即存在 BCK-代数 (X,F) 的一个经典模糊左(右)简理想，使得由 A 诱导的模糊子空间 $(\underline{H}(A),\underline{F})$ 不是一致模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊左(右)简理想。下例说明了这一点。

例 3 设 $X=\{0,a,b\}$，X 上的二元运算 F 由表 2 给出。

表 2

F	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	b	0

则 (X,F) 为 BCK-代数。考虑一致模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$，其中，$\underline{F}=(F,f_{xy})$ 满足条件 $f_{xy}(r,s)=r\wedge s$。现考虑 X 的一个模糊子集 A，定义如下：$A(0)=\dfrac{1}{3}$，$A(a)=\dfrac{1}{5}$，$A(b)=0$。容易验证，A 为 (X,F) 的一个经典模糊右简理想，并且 A 的支集 $A_0=\{0,a\}$ 是 (X,F) 的一个右简理想。由模糊子集 A 诱导的一个模糊子空间为 $\underline{H}(A)=\{(0,[0,\frac{1}{3}],(a,[0,\frac{1}{5}])\}$，其不是模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊右简理想。这是因为 $f_{ab}(A(a),1)=f_{ab}(\frac{1}{5},1)=\frac{1}{5}\neq A(0)=A(aFb)$。

定理 13 设 (Y,F) 是 BCK-代数 (X,F) 的普通左(右)简理想，则对于 X 的任一支集为 Y 的模糊子集 A，都存在一个模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{G},(0,I))$，使得由 A 诱导的模糊子空间 $\underline{H}(A)$ 是模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊左(右)简理想。

证明：假设 (Y,F) 是 BCK-代数 (X,F) 的普通左简理想，A 是 X 的模糊子集且 $A_0=Y$，则 (A_0,F) 是 BCK-代数 (X,F) 的普通左简理想。现定义模糊空间 X_I 上的模糊二元运算 $\underline{G}=(G,g_{xy})$ 如下：取 $G=F$ 且 $g_{xy}(r,s)=\phi_{xy}(r\wedge s)$，其中 ϕ_{xy} 满足：若 $x\in X,y\in A_0$，则

$$\phi_{xy}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{A(xFy)}{A(y)}\lambda, & \lambda<A(y)\\ A(xFy)+\dfrac{1-A(xFy)}{1-A(y)}(\lambda-A(y)), & \lambda\geqslant A(y)\end{cases}$$

若 $x\in X,y\notin A_0$，则 $\phi_{xy}(\lambda)=\lambda$。

显然，$\phi_{xy}(x,y\in X)$ 是 J 上的连续函数，且 $g_{xy}(r,s)=0$ 当且仅当 $r=0$ 或者 $s=0$。容易证明，$(X_I,\underline{G},(0,I))$ 是一个模糊 BCK-代数。如果 $\underline{H}(A)$ 是由 A 诱导的模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 之模糊子空间，则对任意 $x\in X,y\in A_0$，有

$$g_{xy}(1,A(y))=\phi_{xy}(A(y))=A(xFy)$$

这表明 $(\underline{H}(A),\underline{G})$ 是 $(X_I,\underline{F},(0,I))$ 的模糊左简理想。

推论 3 BCK-代数 (X,F) 的每个经典模糊左(右)简理想 A 都可诱导出关于某些模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{G},(0,I))$ 的模糊左(右)简理想。

5 模糊同态

定义 10 假设 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 和 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 是两个模糊 BCK-代数。从模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 到模糊 BCK-代数 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 的模糊同态是一个在上隶属函数的模糊函数：

$$\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x):(X_I,\underline{F},(0_X,I))\rightarrow(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$$

使得

$$\underline{\Phi}((x_1,I)\underline{F}(x_2,I))=\underline{\Phi}((x_1,I)\underline{G}\,\underline{\Phi}(x_2,I)$$

从上述关系有

$$\underline{\Phi}((x_1,Fx_2,I)=(\Phi(x_1,I)\underline{G}(\Phi(x_2),I)$$

$$(\Phi(x_1,Fx_2),I)=(\Phi(x_1)G\Phi(x_2),I)$$

因此 $\Phi(x_1,Fx_2)=\Phi(x_1)G\,\Phi(x_2)$。于是有如下定理。

定理 14 模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 和 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 是同态的当且仅当普通 BCK-代数 (X,F) 和 (Y,G) 是同态 BCK-代数。

注：用上述方法可以给出单态射、满态射、同构、自同态和自同构的定义。称两个模糊 BCK-代数是模糊同构的，如果在它们之间存在一个模糊同构映射。

定义 11 设 $U=\{(x,\Delta_x)\mid x\in U_0\}$ 和 $V=\{(y,\delta_y)\mid y\in V_0\}$ 分别为模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 和 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 的模糊子空间。模糊函数 $\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x):X\rightarrow Y$ 称做从模糊子代数 $(U,\underline{F})$ 到模糊子代数 $(V,\underline{G})$ 的一个同态映射，如果对任意 $x_1,x_2\in U_0$，有

$$\underline{\Phi}((x_1,\Delta_{x_1})\underline{F}(x_2,\Delta_{x_2}))=\underline{\Phi}(x_1,\Delta_{x_1})\underline{G\Phi}(x_2,\Delta_{x_2})$$

上面最后一个等式可以写成

$$\begin{aligned}&\underline{\Phi}(x_1Fx_2,f_{x_1x_2}(\Delta_{x_1},\Delta_{x_2}))\\ &=(\underline{\Phi}(x_1Fx_2),\varphi_{x_1Fx_2}(f_{x_1x_2}(\Delta_{x_1},\Delta_{x_2})))\\ &=(\Phi(x_1),\varphi_{x_1}(\Delta_{x_1}))\underline{G}(\Phi(x_2),\varphi_{x_2}(\Delta_{x_2}))\\ &=((\Phi(x_1)G\Phi(x_2),g_{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}(\varphi_{x_1}(\Delta_{x_1}),\varphi_{x_2}(\Delta_{x_2})))\end{aligned}$$

因此，对任意 $x_1,x_2\in U_0$ 有 $\Phi(x_1Fx_2)=\Phi(x_1)G\Phi(x_2)$，并且 $\varphi_{x_1Fx_2}(f_{x_1x_2}(\Delta_{x_1},\Delta_{x_2}))=g_{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}(\varphi_{x_1}(\Delta_{x_1}),\varphi_{x_2}(\Delta_{x_2}))$，从而可得如下定理。

定理 15 模糊函数 $\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x):X\rightarrow Y$ 是模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 的模糊子代数 $(U,\underline{F})$ 到模糊 BCK-代数 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 的模糊子代数 $(V,\underline{G})$ 间的一个同态映射的充要条件是：

(1) $\Phi:U_0\rightarrow V_0$ 是普通 BCK-代数 (X,F) 的子代数 (U_0,F) 到普通 BCK-代数 (Y,G) 的子代数 (V_0,G) 间的一个同态映射；

(2) 对任意 $x_1,x_2\in U_0$，$\varphi_{x_1Fx_2}(f_{x_1x_2}(\Delta_{x_1},\Delta_{x_2}))=g_{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}(\varphi_{x_1}(\Delta_{x_1}),\varphi_{x_2}(\Delta_{x_2}))$。

定理 16 设 $\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x):(X_I,\underline{F},(0_X,I))\rightarrow(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 为模糊同态映射，并且 $(U,\underline{F})$ 是模糊 BCK-代数 $(X_I,\underline{F},(0_X,I))$ 的模糊子代数。如果对所有 $\Phi(x)=\Phi(x')$ 有 $\varphi_x(\Delta_x)=\varphi_{x'}(\Delta_{x'})$，则有序对 $(\underline{\Phi}(U)=\{(\Phi(x),\varphi_x(\Delta_x))\mid x\in U_0\},\underline{G})$ 是模糊 BCK-代数 $(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$ 的模糊子代数。

证明：对任意 $(w,\delta_w),(z,\delta_z)\in\{(\Phi(x),\varphi_x(\Delta_x))\mid x\in U_0\}$，存在 $x,y\in U_0$ 使得 $(\Phi(x),\varphi_x(\Delta_x))=(w,\delta_w)$，$(\Phi(y),\varphi_y(\Delta_y))=(z,\delta_z)$，即 $\Phi(x)=w$，$\varphi_x(\Delta_x)=\delta_w$，$\Phi(y)=z$ 且

$\varphi_y(\Delta_y)=\delta_z$。注意到条件：对所有 $\Phi(x)=\Phi(x')$ 有 $\varphi_x(\Delta_x)=\varphi_{x'}(\Delta_{x'})$，上述适合条件 x 与 y 在 U_0 可以任意选取。依定理15(1)有：

$wGz=\Phi(x)G\Phi(y)=\Phi(xFy)$

因$(U,\underline{F})$是模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0_X,I))$的模糊子代数，且 $x,y\in U_0$，按定理 2(1)有 $xFy\in U_0$，故 $\Phi(xFy)\in\{\Phi(u)\mid u\in U_0\}$。据定理15，对这样的 $x,y\in U_0$，有：

$$g_{wz}(\delta_w,\delta_z)=g_{\Phi(x)\Phi(y)}(\varphi_x(\Delta_x),\varphi_y(\Delta_y))$$
$$=\varphi_{xFy}(f_{xy}(\Delta_x,\Delta_y))$$

由$(U,\underline{F})$为模糊子代数，据定理 2(2)知，$f_{xy}(\Delta_x,\Delta_y)=\Delta_{xFy}$，所以$g_{wz}(\delta_w,\delta_z)=\varphi_{xFy}(\Delta_{xFy})=\delta_{uGz}$。

综上所述并结合定理 2 可知，结论成立。

定义 12 设 X 的模糊子集 A 能诱导模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0_X,I))$的模糊子代数，$Y$ 的模糊子集 B 能诱导模糊 BCK-代数$(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$的模糊子代数。称模糊函数：$\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x)$：$X\to Y$ 是从模糊子集 A 到模糊子集 B 的一个同态映射，$\underline{\Phi}$如果是从$(X_I,\underline{F},(0_X,I))$的模糊子代数$(H_0(A),\underline{F})$到$(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$的模糊子代数$(H_0(B),\underline{G})$的一个模糊同态映射。

注：容易验证，如果$\underline{\Phi}$是从模糊子数$(H_0(A),\underline{F})$到模糊子代数$(H_0(B),\underline{G})$的一个模糊同态映射，则模糊同态映射$\underline{\Phi}$使得$(\overline{H}(A),\underline{F})$同态于$(\overline{H}(B),\underline{G})$、$(\underline{H}(A),\underline{F})$同态于$(\underline{H}(B),\underline{G})$。

利用定义 12、定理 15 和定理 16，可得如下形式。

定理 17 设 X 的模糊子集 A 能诱导模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0_X,I))$的模糊子代数，$Y$ 的模糊子集 B 能诱导模糊 BCK-代数$(Y_I,\underline{F},(0_Y,I))$的模糊子代数。模糊函数$\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x)$：$X\to Y$ 是从模糊子集 A 到模糊子集 B 的一个同态映射的充分必要条件是：

(1)$\Phi:A_0\to B_0$ 是普通 BCK-代数(X,F)的子代数(A_0,F)到普通 BCK-代数(Y,G)的子代数(B_0,G)间的一个同态映射；

(2)对任意 $x_1,x_2\in A_0$，有：

$\varphi_{x_1Fx_2}(f_{x_1x_2}(A(x_1),A(x_2)))=g_{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}(B(\Phi(x_1)),B(\Phi(x_2))))$

定理 18 设 $\underline{\Phi}=(\Phi,\varphi_x)$：$(X_I,\underline{F},(0_X,I))\to(Y_I,\underline{G},(0_Y,I))$为模糊同态映射，并且$(X,F)$的模糊子集 A 能诱导出模糊 BCK-代数$(X_I,\underline{F},(0_X,I))$的模糊子代数。如果对所有$\Phi(x)=\Phi(x')$有 $\varphi_x(A(x))=\varphi_{x'}(A(x'))$，则$(Y,G)$的模糊子集$\underline{\Phi}(A)$能诱导模糊 BCK-代数的模糊子代数。

类似地，可以讨论模糊左右简理想间的模糊同态问题。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control，1965，8(3)：338-353

[2] Rosenfeld A. Fuzzy groups[J]. J. Math. Anal. Appl.，1971，35(3)：512-517

[3] Negoita C V，Ralescu D A. Applications of fuzzy sets to system analysis[M]. Wiley，New York，1975

[4] Anthony J M，Sherwood H. Fuzzy subgroup redefined [J]. J. Math. Anal. Appl.，1979(69)：124-130

[5] Kuroki N. Fuzzy bi-ideals in semigroups[J]. Comment. Math. Univ. St. Paul.，1980，28(1)：17-21

[6] Kuroki N. On fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in semigroups[J]. Fuzzy Set and Systems，1981，5(2)：203-215

[7] Nanda S. Fuzzy fields and fuzzy linear spaces [J]. Fuzzy Set and Systems，1986，19(1)：89-94

[8] Liu W J. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals[J]. Fuzzy Set and Systems，1982，8(8)：133-139

[9] Xi O G. Fuzzy BCK-algebra[J]. Math. Japonica，1991，36(5)：935-942

[10] 路玲霞. Heyting 代数中的模糊滤子[J]. 内江师范学院学报，2007，22(2)：15-16

[11] Liu W J. Fuzzy prime ideals and fuzzy radical ideals[J]. Information Sciences，1990，50(2)：111-122

[12] 谷文祥，卢荼，刘宁. 关于模糊域和模糊向量空间[J]. 东北师范大学学报，1994(1)：17-20

[13] Kumbhojkar H V，Bapat M S. Correspondence theorem for fuzzy ideals[J]. Fuzzy Set and Systems，1991，41(2)：213-219

[14] Dib K A，Youssef N. Fuzzy Cartesian product，fuzzy relations and fuzzy functions[J]. Information Sciences，1991，41(3)：299-315

[15] Dib K A. On fuzzy spaces and fuzzy group theory[J]. Information Sciences，1994，80(3/4)：253-282

[16] Dib K A，Galhum N. Fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in fuzzy semigroups[J]. Fuzzy Set and Systems，1997，92(1)：103-111

(上接第 44 页)

[4] 刘艳君，谢莉，丁锋. 非均匀采样数据系统的 AM-RLS 辨识方法及仿真研究[J]. 系统仿真学报，2009，21(19)：6186-6189

[5] Ding Feng，Chen Tong-wen. Hierarchical least squares identification methods for multivariable systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2005，50(3)：397-402

[6] Liu Xing-gao，Lu Jing. Least squares based iterative identification for a class of multirate systems[J]. Automatica，2010，46(3)：549-554

[7] Liu Yan-jun，Wang Dong-qing，Ding Feng. Least squares based iterative algorithms for identifying Box-Jenkins models with finite measurement data[J]. Digital Signal Processing，2010，20(5)：1458-1467

[8] Li Dong-guang，Shah Sirish L，Chen Tong-wen，et al. Application of dual-rate modeling to CCR octane quality inferential control[J]. IEEE Transactions on Control System Technology，2003，11(1)：43-51

[9] Sheng Jie，Chen Tong-wen，Shah Sirish L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems [J]. Journal of Process Control，2002，12(8)：875-888

[10] Ding Feng，Ding Jie. Least-squares parameter estimation for systems with irregularly missing data[J]. International Journal of Adaptive Control And Signal Processing，2010，24：540-553

[11] 潘爽，赵国荣，高超，等. 测量数据丢失的随机不确定系统鲁棒滤波递推算法[J]. 控制与决策，2011，26(2)：280-284

[12] Ding Feng，Liu Guang-jun，Liu Xiao-ping. Parameter estimation with scarce measurements [J]. Automatica，2011，47(8)：1646-1655