区间值三I算法的鲁棒性

罗敏霞 程 泽

（中国计量学院理学院 杭州 310018）

摘 要 基于正规Minkowski距离研究了区间值三I算法的鲁棒性。首先，给出区间值模糊连接词的最大灵敏度和区间值模糊集扰动的定义；其次，基于正规Minkowski距离分别讨论了区间值Godel蕴涵、Lukasiewize蕴涵、Goguen蕴涵以及它们各自对应的区间值三角范数的灵敏度；最后，研究了区间值模糊推理全蕴涵三I算法的鲁棒性。

关键词 区间值三角范数，区间值剩余蕴涵，区间值三I算法，模糊连接词的灵敏度

中图法分类号 TP183，O174.41 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.10.052

Robustness of Interval-valued Triple I Algorithms

LUO Min-xia CHENG Ze

(College of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract In this paper, the robustness of interval-valued triple I algorithms based on normalized Minkowski distance was investigated. Firstly, the concepts of maximum sensitivity of interval-valued fuzzy connectives and perturbation of interval-valued fuzzy sets are proposed. Secondly, based on the normalized Minkowski distance, the sensitivity of interval-valued Gödel implication, Lukasiewize implication, Goguen implication and their corresponding t-norms are discussed. Finally, we investigated the robustness of interval-valued fuzzy inference full implication triple I algorithm.

Keywords Interval-valued t-norms, Interval-valued residual implication, Interval-valued triple I algorithms, Sensitivity of fuzzy connectives

1 引言

自从Zadeh提出了CRI(Compositial Rule of Inference)模糊推理算法[1]，许多学者对其进行改进，提出了许多新的算法，其中最重要的是王国俊教授提出的模糊推理全蕴涵三I算法[2]。

鲁棒性是评价推理算法的一个重要标准，许多研究者对其进行了研究。应明生介绍了模糊集的最大以及平均扰动的概念[3]；Cheng和Fu研究了模糊集的简单扰动，并进一步讨论了模糊推理的误差[4]；戴松松等基于正规Minkowski距离分析了模糊连接词的扰动，并进一步研究了CRI推理算法的鲁棒性[5]；李德超等基于Moore距离研究了区间值模糊连接词的扰动及区间值CRI算法的鲁棒性[6]；罗敏霞教授进一步给出了区间值全蕴涵推理算法的三I解，并基于Moore距离研究了区间值全蕴涵三I算法的鲁棒性[7]。

距离是研究鲁棒性的一种重要工具。Atanassov将经典集的Hamming距离、欧氏距离拓展到了直觉主义模糊集[8]；Deschrijver证明了直觉主义模糊集等价于区间值模糊集[9]；王艳平给出了区间值正规Hamming距离、正规欧氏距离及正规Minkowski距离的具体表示形式[10]。

目前对于区间值模糊推理算法的鲁棒性都是基于Moore距离进行研究的[6,7]。显然，选取不同的距离，推理算法的鲁棒性结果是不同的。因此考虑以下问题：是否可以找到一个统一的距离来研究区间值模糊推理算法的鲁棒性。

由于区间值正规Hamming距离、正规欧氏距离及Moore距离都是正规Minkowski距离的特殊情况，因此使用正规Minkowski距离研究区间值模糊连接词的扰动及区间值模糊推理全蕴涵三I算法的鲁棒性。

2 预备知识

假设$SI=\{[x,y]\mid x\leqslant y, x,y\in[0,1]\}$，若$a\leqslant c, b\leqslant d$，则$[a,b]\leqslant[c,d]$，称$SI$上的序为Kulisch-Miranker序。显然，定义在SI上的序是偏序。进一步，由$[a,b]\wedge[c,d]=[a,b]$当且仅当$[a,b]\leqslant[c,d]$，$[a,b]\vee[c,d]=[c,d]$当且仅当$[a,b]\leqslant[c,d]$，可以证明$(SI,\wedge,\vee,[0,0],[1,1])$是完备的有界分配格。

定义1[11] 设T是定义在区间$[0,1]$上的三角范数。$\tilde{T}: SI\times SI\rightarrow SI$是定义在$SI$上的结合三角范数。这里$\tilde{T}([a,b],[c,d])=[T(a,c),T(b,d)]$。如果区间$[0,1]$上的三角范数$T$是左连续的，则称$SI$上的结合三角范数$\tilde{T}$也是左连续的。

到稿日期：2015-09-08 返修日期：2015-12-17 本文受基金项目(61273018,61302190)资助。

罗敏霞(1964－)，女，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为模糊逻辑与近似推理；程 泽(1989－)，男，硕士生，主要研究方向为非经典逻辑与模糊推理算法。

注：这里的结合三角范数也称为 t 表示三角范数[12]。本文所涉及的三角范数都为 t 表示三角范数。

定义 2[13] 对于任意的$[a,b],[c,d]\in SI$，区间值剩余蕴涵$\tilde{R}$定义为：

$$\tilde{R}([a,b],[c,d])=\vee\{[x,y]\in SI\mid \tilde{T}([a,b],[x,y])\leqslant [c,d]\}$$

其中，$\tilde{T}$是 SI 上的三角范数。

引理 1[13] $\tilde{T}$是 SI 上与 T 结合的三角范数。设$\tilde{R}$是$\tilde{T}$剩余蕴涵，可表示为如下形式：

$$\tilde{R}([a,b],[c,d])=[I_{R_T}(a,c)\wedge I_{R_T}(b,d),I_{R_T}(b,d)]$$

其中，I_{R_T}是与 T 相关的剩余蕴涵。

例 3 种常用的区间值剩余蕴涵及其对应的三角范数。

(1)区间值 Gödel 蕴涵及其对应的三角范数[13]：

$$\tilde{R}_G([a,b],[c,d])=\begin{cases}[c,d], & a>c,b>d\\ [c,1], & a>c,b\leqslant d\\ [1,1], & a\leqslant c,b\leqslant d\\ [d,d], & a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

$$\tilde{T}_G([a,b],[c,d])=[a\wedge c,b\wedge d]$$

(2) 区间值 Lukasiewicz 蕴涵及其对应的三角范数[13]：

$$\tilde{R}_L([a,b],[c,d])=$$

$$\begin{cases}[(1-a+c)\wedge(1-b+d),1-b+d], & a>c,b>d\\ [1-a+c,1], & a>c,b\leqslant d\\ [1,1], & a\leqslant c,b\leqslant d\\ [1-b+d,1-b+d], & a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

$$\tilde{T}_L([a,b],[c,d])=[0\vee(a+c-1),0\vee(b+d-1)]$$

(3)区间值 Goguen 蕴涵及其对应的三角范数[7]：

$$\tilde{R}_{G_0}([a,b],[c,d])=\begin{cases}[\frac{c}{a}\wedge\frac{d}{b},\frac{d}{b}], & a>c,b>d\\ [\frac{c}{a},1], & a>c,b\leqslant d\\ [1,1], & a\leqslant c,b\leqslant d\\ [\frac{d}{b},\frac{d}{b}], & a\leqslant c,b>d\end{cases}$$

$$\tilde{T}_{G_0}([a,b],[c,d])=[ac,bd]$$

定义 3[10] 对于任意$[X,Y]=([x_1,y_1],[x_2,y_2],\cdots,[x_n,y_n])\in SI,[X',Y']=([x_1',y_1'],[x_2',y_2'],\cdots,[x_n',y_n'])\in SI^n$，$1\leqslant p\leqslant\infty$。

$$d_p([X,Y],[X',Y'])=(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i-x_i'|^p+|y_i-y_i'|^p))^{1/p}$$

称为$[X,Y],[X',Y']$的正规 Minkowski 距离。

注：当 $p=1$，

$$d_1([X,Y],[X',Y'])=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i-x_i'|+|y_i-y_i'|)$$

则 d_1 为区间值上的正规 Hamming 距离。

当 $p=2$，

$$d_2([X,Y],[X',Y'])=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|x_i-x_i'|^2+|y_i-y_i'|^2)}$$

则 d_2 为区间值上的正规欧氏距离。

当 $p=\infty$，

$$d_\infty([X,Y],[X',Y'])=\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_i'|,\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i-y_i'|\}$$

则 d_∞ 为区间值上的 Moore 距离。

引理 2[14] f,g 是 U 上的有界实函数，则

$$|\sup_{x\in U}f(x)-\sup_{x\in U}g(x)|\leqslant\sup_{x\in U}|f(x)-g(x)|$$

$$|\inf_{x\in U}f(x)-\inf_{x\in U}g(x)|\leqslant\sup_{x\in U}|f(x)-g(x)|$$

引理 3[14] a,b 是非负实数，$1\leqslant p<\infty$，则$(\max(a,b))^p\leqslant a^p+b^p$。

引理 4[15](Minkowski 不等式) 令$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$，$1\leqslant p<\infty$，则 $(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p)^{1/p}\leqslant(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p)^{1/p}+(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p)^{1/p}$。

引理 5[16] a,b 是非负实数，$1\leqslant p$，则 $\lim_{p\to\infty}(a^p+b^p)^{1/p}=\max(a,b)$。

定理 1[7] 假设 X,Y 是两个非空集。$\tilde{R}$是 SI 上由左连续三角范数$\tilde{T}$所诱导的区间值剩余蕴涵，则 $IFMP$ 的区间值$\tilde{R}$型三 I 解为：

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}\{\tilde{T}(\tilde{R}(A(x),B(y)),A^*(x)))\},y\in Y$$

定理 2[7] 假设 X,Y 是两个非空集。$\tilde{R}$是 SI 上由左连续三角范数$\tilde{T}$所诱导的区间值剩余蕴涵，则 $IFMT$ 的区间值$\tilde{R}$型三 I 解为：

$$A^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}\{\tilde{R}(\tilde{R}(A(x),B(y)),B^*(y)))\},x\in X$$

3 区间值模糊连接词的扰动

本文只针对有限论域和 $p\in[1,\infty)$进行讨论。假设 U,V 是非空集。$\pounds(U),\pounds(V)$分别是 U,V 上的所有区间值模糊集。记 $A(x_i)=A_i=[A_{li},A_{ri}]$。

定义 4 令 $f:SI\times SI\to SI$，$A=\{A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n)\}$，$A'=\{A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n)\}$是定义在有限论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的区间值模糊集。$B=\{B(y_1),B(y_2),\cdots,B(y_m)\}$，$B'=\{B'(y_1),B'(y_2),\cdots,B'(y_m)\}$是定义在有限论域 $V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$上的区间值模糊集，且 $\varepsilon_i\in[0,1](i=1,2)$。则 f 在(A,B)的$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$灵敏度定义如下：

$$\Delta_f((A,B),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))=\bigvee_{A'\in\pounds(U),B'\in\pounds(V)}\{d_p(f(A,B),f(A',B'))\mid d_p(A,A')\leqslant\varepsilon_1,d_p(B,B')\leqslant\varepsilon_2\}$$

其中，$f(A,B)=\{f(A_i,B_j),1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\}$。

定义 5 f 的最大灵敏度为：$\Delta_f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\bigvee_{A\in\pounds(U),B\in\pounds(V)}\Delta_f((A,B),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$。

定义 6 令 $A=\{A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n)\}$，$A'=\{A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n)\}$是定义在有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的区间值模糊集，$\varepsilon\in[0,1]$。如果：

$$\|A-A'\|=\bigvee_{A'\in\pounds(U)}(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|A_l(x_i)-A_l'(x_i)|^p+|A_r(x_i)-A_r'(x_i)|^p))^{1/p}\leqslant\varepsilon$$

则称 A' 是 A 的 ε 扰动。

命题 1 假设 $\|A-A'\|\leqslant\varepsilon_1$，$\|B-B'\|\leqslant\varepsilon_2$。则有：$\Delta_f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 2^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$。这里 $f\in\{\tilde{T}_L,\tilde{T}_{G_0}\}$。

证明：只考虑 $f=\tilde{T}_L$。令 $A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$，$B=(B(y_1),B(y_2),\cdots,B(y_m))$。$A'=(A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n))$，$B'=(B'(y_1),B'(y_2),\cdots,B'(y_m))$。

$$\begin{aligned}&d_p(f(A,B),f(A',B'))\\&=(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|A_{li}*B_{lj}-A'_{li}*B'_{lj}|^p+|A_{ri}*B_{rj}-A'_{ri}*B'_{rj}|^p)^{1/p}\\&=(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}+B_{lj}-1)\vee 0-(A'_{li}+B'_{lj}-1)\vee 0|^p+|(A_{ri}+B_{rj}-1)\vee 0-(A'_{ri}+B'_{rj}-1)\vee 0|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p+|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p)^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max\{(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p,|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p\})^{1/p}\end{aligned}$$

不妨假设

$\max\{|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p,|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p\}=|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p$

上式可化为：

$$\begin{aligned}&d_p(f(A,B),f(A',B'))\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p)^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})|^p)^{1/p}+(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(B_{lj}-B'_{lj})|^p)^{1/p}\\&\leqslant 2^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\end{aligned}$$

即 $\Delta_f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 2^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$。

命题 2 假设

$\|A-A'\|\leqslant\varepsilon_1$，$\|B-B'\|\leqslant\varepsilon_2$。则有 $\Delta_{\tilde{T}_G}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant(\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p)^{1/p}$。

证明：

$$\begin{aligned}&d_p(\tilde{T}_G(A,B),\tilde{T}_G(A',B'))\\&=(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|A_{li}\wedge B_{lj}-A'_{li}\wedge B'_{lj}\|A_{ri}\wedge B_{rj}-A'_{ri}\wedge B'_{rj}|))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}((|A_{li}-A'_{li}|\vee|B_{lj}-B'_{lj}|)^p+(|A_{ri}-A'_{ri}|\vee|B_{rj}-B'_{rj}|)^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|A_{li}-A'_{li}|^p+|B_{lj}-B'_{lj}|^p+|A_{ri}-A'_{ri}|^p+|B_{rj}-B'_{rj}|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|A_{li}-A'_{li}|^p+|A_{ri}-A'_{ri}|^p)+\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|B_{lj}-B'_{lj}|^p+|B_{rj}-B'_{rj}|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p)^{1/p}\end{aligned}$$

故 $\Delta_{\tilde{T}_G}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant(\varepsilon_1^p+\varepsilon_2^p)^{1/p}$。

命题 3 假设 $\|A-A'\|\leqslant\varepsilon_1$，$\|B-B'\|\leqslant\varepsilon_2$。则有：$\Delta_{\tilde{R}_L}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 2^{1/2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$。

证明：令 $A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$，$B=(B(y_1),B(y_2),\cdots,B(y_m))$。$A'=(A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n))$，$B'=(B'(y_1),B'(y_2),\cdots,B'(y_m))$。

$$\begin{aligned}&d_p(\tilde{R}_L(A,B),\tilde{R}_L(A',B'))\\&=(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}\to B_{lj})\wedge(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{li}\to B'_{lj})\wedge(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p+|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}\to B_{lj})-(A'_{li}\to B'_{lj})|^p\vee|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p+|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p\vee|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p+|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max\{(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p,|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p\})^{1/p}\end{aligned}$$

不妨假设

$\max\{|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p,|(A_{ri}-A'_{ri})+(B_{rj}-B'_{rj})|^p\}=|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p$

上式可化为：

$$\begin{aligned}&d(\tilde{R}_L(A,B),\tilde{R}_L(A',B'))\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})+(B_{lj}-B'_{lj})|^p)^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}-A'_{li})|^p)^{1/p}+(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(B_{lj}-B'_{lj})|^p)^{1/p}\\&\leqslant 2^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\end{aligned}$$

故 $\Delta_{\tilde{R}_L}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 2^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$。

命题 4 假设 $\|A-A'\|\leqslant\varepsilon_1$，$\|B-B'\|\leqslant\varepsilon_2$，则有：$\Delta_{\tilde{R}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 1$。这里 $\tilde{R}\in\{\tilde{R}_{G_0},\tilde{R}_G\}$。

证明：只考虑 $\tilde{R}=\tilde{R}_{G_0}$。

$$\begin{aligned}&d_p(\tilde{R}(A,B),\tilde{R}(A',B'))\\&=(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}\to B_{lj})\wedge(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{li}\to B'_{lj})\wedge(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p+|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|(A_{li}\to B_{lj})-(A'_{li}\to B'_{lj})|^p\vee|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p+|(A_{ri}\to B_{rj})-(A'_{ri}\to B'_{rj})|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(|1-\frac{B'_{lj}}{A_{li}}|^p\vee|1-\frac{B'_{rj}}{A_{ri}}|^p+|1-\frac{B'_{rj}}{A_{ri}}|^p))^{1/p}\\&\leqslant 1\end{aligned}$$

$\Delta_{\tilde{R}_{G_0}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\leqslant 1$。

4 区间值三 I 算法的鲁棒性

定理 3 假设 A,A',A^*,A'^* 是定义在有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的区间值模糊集。B,B',B^*,B'^* 是定义在有限论域 $V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 上的区间值模糊集。如果 $\|A-$

$A'\| \leqslant \varepsilon_1, \| B-B' \| \leqslant \varepsilon_2, \| A^* - A'^* \| \leqslant \varepsilon_3$。这里 B^*, B'^* 分别为定理 1 中 $IFMP(A,B,A^*)$ 和 $IFMP(A',B',A'^*)$ 的 $\tilde{R}$型三 I 解。则有：

$$\| B^* - B'^* \| \leqslant \begin{cases} 1, & \tilde{T}=\tilde{T}_G, \tilde{R}=\tilde{R}_G \\ 1, & \tilde{T}=\tilde{T}_{G_0}, \tilde{R}=\tilde{R}_{G_0} \\ (2n)^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n^{\frac{1}{p}}\varepsilon_3, & \tilde{T}=\tilde{T}_L, \tilde{R}=\tilde{R}_L \end{cases}$$

证明：对于区间值 Goguen 蕴涵、Gödel 蕴涵及其对应的三角范数，显然成立。

下面对区间值 Lukasiewicz 蕴涵及其对应的三角范数进行证明。

令：

$$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$$

$$A'=(A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n))$$

$$B=(B(y_1),B(y_2),\cdots,B(y_m))$$

$$B'=(B'(y_1),B'(y_2),\cdots,B'(y_m))$$

$$A^*=(A^*(x_1),A^*(x_2),\cdots,A^*(x_n))$$

$$A'^*=(A'^*(x_1),A'^*(x_2),\cdots,A'^*(x_n))$$

$$B^*=(B^*(y_1),B^*(y_2),\cdots,B^*(y_m))$$

$$B'^*=(B'^*(y_1),B'^*(y_2),\cdots,B'^*(y_m))$$

$$\tilde{R}(A(x),B(y))=(\tilde{R}(A(x_i),B(y_j)))_{nm} = ([\tilde{R}_l(A_i,B_j),\tilde{R}_r(A_i,B_j)])_{nm}$$

$$B^*(y_j)=\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n}\{[(A_{li}^*+\tilde{R}_l(A_i,B_j)-1)\vee 0,(A_{ri}^*+\tilde{R}_r(A_i,B_j)-1)\vee 0]\}$$

$$B'^*(y_j)=\bigvee_{1\leqslant i\leqslant n}\{[(A_{li}'^*+\tilde{R}_l(A_i',B_j')-1)\vee 0,(A_{ri}'^*+\tilde{R}_r(A_i',B_j')-1)\vee 0]\}$$

$$d_p(B^*,B'^*)$$

$$\leqslant(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(|B_l^*(y_j)-B_l'^*(y_j)|^p+|B_r^*(y_j)-B_r'^*(y_j)|^p))^{1/p}$$

$$\leqslant(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(|\max_{1\leqslant i\leqslant n}((A_{li}^*+\tilde{R}_l(A_i,B_j)-1)\vee 0)-\max_{1\leqslant i\leqslant n}((A'^*_{li}+\tilde{R}_l(A_i',B_j')-1)\vee 0)|^p+|\max_{1\leqslant i\leqslant n}((A_{ri}^*+\tilde{R}_r(A_i,B_j)-1)\vee 0)-\max_{1\leqslant i\leqslant n}((A_{ri}'^*+\tilde{R}_r(A_i',B_j')-1)\vee 0)|^p))^{1/p}$$

$$\leqslant(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(|\max_{1\leqslant i\leqslant n}(A_{li}^*+\tilde{R}_l(A_i,B_j)-1)-\max_{1\leqslant i\leqslant n}(A'^*_{li}+\tilde{R}_l(A_i',B_j')-1)|^p+|\max_{1\leqslant i\leqslant n}(A_{ri}^*+\tilde{R}_r(A_i,B_j)-1)-\max_{1\leqslant i\leqslant n}(A_{ri}'^*+\tilde{R}_r(A_i',B_j')-1)|^p))^{1/p}$$

$$\leqslant(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{li}^*-A_{li}'^*)+(\tilde{R}_l(A_i,B_j)-\tilde{R}_l(A_i',B_j'))|^p+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{ri}^*-A'^*_{ri})+(\tilde{R}_r(A_i,B_j)-\tilde{R}_r(A_i',B_j'))|^p))^{1/p}$$

$$\leqslant(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{li}^*-A_{li}'^*)+(\tilde{R}_l(A_i,B_j)-\tilde{R}_l(A_i',B_j'))|^p,\max_{1\leqslant i\leqslant n}|((A_{ri}^*-A_{ri}'^*)+(\tilde{R}_r(A_i,B_j)-\tilde{R}_r(A_i',B_j'))|^p\}))^{1/p}$$

不妨假设：

$$\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{li}^*-A_{li}'^*)+(\tilde{R}_l(A_i,B_j)-\tilde{R}_l(A_i',B_j'))|^p,\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{ri}^*-A'^*_{ri})+(\tilde{R}_r(A_i,B_j)-\tilde{R}_r(A'_i,B'_j))|^p\}$$

$$=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(A_{li}^*-A_{li}'^*)+(\tilde{R}_l(A_i,B_j)-\tilde{R}_l(A_i',B_j'))|^p$$

$$=|(A_{lt}^*-A_{lt}'^*)+(\tilde{R}_l(A_t,B_j)-\tilde{R}_l(A_t',B_j'))|^p$$

则上式可化为

$$d_p(B^*,B'^*)$$

$$\leqslant(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}2|(A_{lt}^*-A_{lt}'^*)+(\tilde{R}_l(A_t,B_j)-\tilde{R}_l(A_t',B_j'))|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}2|(A_{lt}^*-A_{lt}'^*)|^p)^{1/p}+(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}2(\tilde{R}_l(A_t,B_j)-\tilde{R}_l(A_t',B_j'))|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant n^{1/p}\varepsilon_3+(2n)^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ \| B^*-B'^* \| \leqslant(2n)^{1/p}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+n^{1/p}\varepsilon_3$$

定理 4 假设 A,A',A^*,A'^* 是定义在有限论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的区间值模糊集。B,B',B^*,B'^* 是定义在有限论域 $V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 上的区间值模糊集。如果 $\|A-A'\| \leqslant \varepsilon_1, \| B-B' \| \leqslant \varepsilon_2, \| B^* - B'^* \| \leqslant \varepsilon_3$。这里 A^*, A'^* 分别为定理 2 中 $IFMT(A,B,B^*)$ 和 $IFMT(A',B',B'^*)$ 的 $\tilde{R}$型三 I 解。则有：

$$\| A^* - A'^* \| \leqslant \begin{cases} 1, & \tilde{T}=\tilde{T}_G, \tilde{R}=\tilde{R}_G \\ 1, & \tilde{T}=\tilde{T}_{G_0}, \tilde{R}=\tilde{R}_{G_0} \\ (2m)^{\frac{1}{p}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+m^{\frac{1}{p}}\varepsilon_3, & \tilde{T}=\tilde{T}_L, \tilde{R}=\tilde{R}_L \end{cases}$$

证明：对于区间值 Goguen 蕴涵、Gödel 蕴涵及其对应的三角范数，显然成立。

下面对区间值 Lukasiewicz 蕴涵及其对应的三角范数进行证明。

令：

$$A=(A(x_1),A(x_2),\cdots,A(x_n))$$

$$A'=(A'(x_1),A'(x_2),\cdots,A'(x_n))$$

$$B=(B(y_1),B(y_2),\cdots,B(y_m))$$

$$B'=(B'(y_1),B'(y_2),\cdots,B'(y_m))$$

$$A^*=(A^*(x_1),A^*(x_2),\cdots,A^*(x_n))$$

$$A'^*=(A'^*(x_1),A'^*(x_2),\cdots,A'^*(x_n))$$

$$B^*=(B^*(y_1),B^*(y_2),\cdots,B^*(y_m))$$

$$B'^*=(B'^*(y_1),B'^*(y_2),\cdots,B'^*(y_m))$$

$$\tilde{R}(A(x),B(y))=(\tilde{R}(A(x_i),B(y_j)))_{nm} = ([\tilde{R}_l(A_i,B_j),\tilde{R}_r(A_i,B_j)])_{nm}$$

$$A^*(x_i)=\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant m}\{[(B_{lj}^*+\tilde{R}_l(A_i,B_j)-1)\wedge(B_{rj}^*+\tilde{R}_r(A_i,B_j)-1)\wedge 1,(B_{rj}^*+\tilde{R}(A_i,B_j)-1)\wedge 1]\}$$

$$A'^*(x_i)=\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant m}\{[(B_{lj}'^*+\tilde{R}_l(A'_i,B'_j)-1)\wedge(B_{rj}'^*+\tilde{R}_r(A_i',B_j')-1)\wedge 1,(B_{rj}'^*+\tilde{R}(A_i',B_j')-1)\wedge 1]\}$$

$$\begin{aligned}&d_p(A^*,A'^*)\\&=(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|A_{li}^*-A_{li}'^*|^p+|A_{ri}^*-A_{ri}'^*|^p))^{1/p}\\&=(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|\min_{1\leqslant j\leqslant m}(((1-\tilde{R}_l(A_i,B_j)+B_{lj}^*)\wedge(1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*))\wedge 1)-\min_{1\leqslant j\leqslant m}(((1-\tilde{R}_l(A_i',B_j')+B_{lj}'^*)\wedge(1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B'^*_{rj}))\wedge 1)|^p+|\min_{1\leqslant j\leqslant m}((1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*)\wedge 1)-\min_{1\leqslant j\leqslant m}((1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B_{rj}'^*)\wedge 1)|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\max_{1\leqslant j\leqslant m}|(((1-\tilde{R}_l(A_i,B_j)+B_{lj}^*)\wedge(1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*))\wedge 1)-(((1-\tilde{R}_l(A_i',B_j')+B_{lj}'^*)\wedge(1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B_{rj}'^*))\wedge 1)|^p+\max_{1\leqslant j\leqslant m}|((1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*)\wedge 1)-((1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B_{rj}'^*))\wedge 1)|^p))^{1/p}\\&\leqslant(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\max_{1\leqslant j\leqslant m}(|(1-\tilde{R}_l(A_i,B_j)+B_{lj}^*)-(1-\tilde{R}_l(A_i',B_j')+B_{lj}'^*)|^p\vee|(1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*)-(1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B_{rj}'^*)|^p+\max_{1\leqslant j\leqslant m}|(1-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+B_{rj}^*)-(1-\tilde{R}_r(A_i',B_j')+B_{rj}'^*)|^p))^{1/p}\\&=(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\max_{1\leqslant j\leqslant m}(|(\tilde{R}_l(A_i',B_j')-\tilde{R}_l(A_i,B_j)+(B_{lj}^*-B_{lj}'^*)|^p\vee|(\tilde{R}_r(A_i',B_j')-\tilde{R}_r(A_i,B_j)+(B_{rj}^*-B_{rj}^*)|^p+\max_{1\leqslant j\leqslant m}|(\tilde{R}_r(A_i,B_j)-\tilde{R}_r(A_i',B_j'))+(B_{rj}^*-B_{rj}'^*)|^p))^{1/p}\end{aligned}$$

相似于定理 3 的证明，可以证明 $\| A^*-A'^*\|\leqslant(2m)^{\frac{1}{p}}(\epsilon_1+\epsilon_2)+m^{\frac{1}{p}}\epsilon_3$。

结束语 模糊推理算法的鲁棒性与距离的选取有密切的关系，所以基于不同的距离其结果是不同的。因此，考虑采用一种统一形式的距离来研究区间值模糊推理算法的鲁棒性。在本文中，采用正规 Minkowski 距离讨论了区间值 Gödel 蕴涵、Lukasiewize 蕴涵、Goguen 蕴涵以及它们各自对应的区间值三角范数的灵敏度。进一步，研究了基于 3 种特殊区间值蕴涵算子的三 I 算法的鲁棒性。本文证明了基于区间值 Lukasiewize 蕴涵的三 I 推理算法具有很好的鲁棒性，从而其最适合在工程领域中应用。本文的研究结果为区间值模糊推理算法的应用提供坚实的理论支撑。

参考文献

[1] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. IEEE Trans. Systems. Man and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44

[2] Wang Guo-Jun. The full implication triple I method of fuzzy reasoning[J]. Sci. China, Ser. E, 1999, 29(1): 43-53(in Chinese)
王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑)，1999, 29(1): 43-53

[3] Ying Ming-sheng. Perturbation of fuzzy reasoning [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 625-629

[4] Cheng Guo-sheng, Fu Yu-xi. Error estimation of perturbations under CRI[J]. IEEE Transactionson Fuzzy Systems, 2006, 14(6): 709-715

[5] Dai Song-song, Pei Dao-wu. Robustness analysis of full implication inference method[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5): 653-666

[6] Li De-chao. Robustness of interval-valued fuzzy inference[J]. Information Sciences, 2011, 181(20): 4754-4764

[7] Luo Min-xia, Zhang Kai. Robustness of full implication algorithms based on interval-valued fuzzy inference [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 62: 61-72

[8] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Application[M]. Physica-Verlag, Wyrzburg, 1999

[9] Deschrijver G, Kerre E E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 133(2): 227-235

[10] 张艳平. 区间值模糊集之间几种距离的研究[D]. 长沙：中南大学，2006

[11] Jenei S. A more efficient method for defining fuzzy connectives [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(1): 25-35

[12] Deschrijver G, Cornelis C, Kerre E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12 (1): 45-61

[13] Alcalde C, Burusco A, Fuentes-Gonzalez R. A constructive method for the definition of interval-valued fuzzy implication operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(2): 211-227

[14] Hong D H, Hwang S Y. A note on the value similarity of fuzzy systems variables [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 66(3): 383-386

[15] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004

[16] Hung W L, Yang M S. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on LP metric [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2007, 46(1): 120-136

[17] Luo Min-xia. Yao Ning. Syntactic graded method of formulas in the system L* [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 424-428(in Chinese)
罗敏霞，姚宁. L* 系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报，2011, 39(2): 424-428

[18] Luo Min-xia, Zhou xiao-ling. Robustness of reverse triple I algorithms based on interval-valued fuzzy inference [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 66: 16-26

[19] Luo Min-xia, Cheng Ze. Robustness of interval-valued universal triple I algorithms[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 30(3): 1619-1628